積分の変数変換の定理。 平面の点 (x,y) に対し、平面の点 $(u(x,y),v(x,y))$ を対応させる連続微分可能写像が平面の有界領域 A を平面の有界領域 B に写し、これが逆写像をもつとする。平面上の（または領域 B の閉包上の）連続関数 $f(u,v)$ に対し、積分の間の次の等式が成立する。

$$\int_B f(u,v)\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v = \int_A f(u(x,y),v(x,y))\left|\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}\right|\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$u(x,y)$, $v(x,y)$ が２回連続微分可能としたときのこの定理の証明の要点を以下に述べる。

２変数関数 $g(x,y)=g(\vec{q})$ に対し、ベクトル $\vec{r}=(a,b)$ 方向の直線 $\vec{q}+t\vec{r}$ において、

$$g(\vec{q}+t\vec{r}) = g(\vec{q}) + a\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{q}+s\vec{r})\,\mathrm{d}\,s + b\int_0^t \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{q}+s\vec{r})\,\mathrm{d}\,s$$

この右辺は次のように変形される。

$$\begin{aligned}&g(\vec{q}) + ta\frac{\partial g}{\partial x}(\vec{q}) + tb\frac{\partial g}{\partial y}(\vec{q})\\ &+a\int_0^t \big(\frac{\partial g}{\partial x}(\vec{q}+s\vec{r}) - \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{q})\big)\,\mathrm{d}\,s + b\int_0^t \big(\frac{\partial g}{\partial y}(\vec{q}+s\vec{r}) - \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{q})\big)\,\mathrm{d}\,s\end{aligned}$$

$g(x,y)$ の２階微分 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ の絶対値が M 以下ならば、

$$\big|\frac{\partial g}{\partial x}(\vec{q}+s\vec{r}) - \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{q})\big| \leqq \sqrt{2}Ms\|\vec{r}\|, \qquad \big|\frac{\partial g}{\partial y}(\vec{q}+s\vec{r}) - \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{q})\big| \leqq \sqrt{2}Ms\|\vec{r}\|$$

となる。従って、

$$g(\vec{q}+t\vec{r}) = g(\vec{q}) + ta\frac{\partial g}{\partial x}(\vec{q}) + tb\frac{\partial g}{\partial y}(\vec{q}) + \varepsilon(\vec{q},t\vec{r})$$

について、

$$\begin{aligned}|\varepsilon(\vec{q},t\vec{r})| &\leqq |a|\int_0^t \sqrt{2}Ms\|\vec{r}\|\,\mathrm{d}\,s + |b|\int_0^t \sqrt{2}Ms\|\vec{r}\|\,\mathrm{d}\,s\\ &= (|a|+|b|)\frac{\sqrt{2}M\|\vec{r}\|t^2}{2} \leqq M\|\vec{r}\|^2t^2\end{aligned}$$

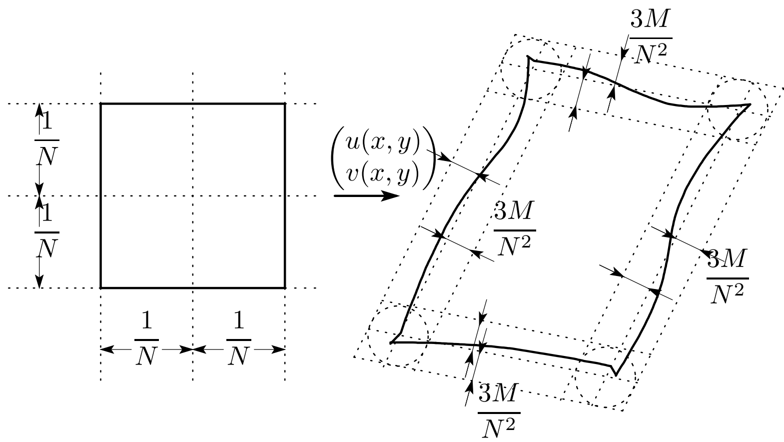
さて、小長方形の像が、平行四辺形に近いということを定式化する。A は１辺の長さが L の正方形に含まれる。十分大きな自然数 N をとって、一辺の長さが $\dfrac{2}{N}$ の正方形の網をかけ、多くとも $\dfrac{L^2N^2}{4}$ 個の小正方形に分割する。各小正方形の中心 $\vec{q_i}=(x_i,y_i)$ から出るベクトル $\vec{r}=(a,b)$ の方向の直線 $\vec{q_i}+t\vec{r}=(x_i,y_i)+t(a,b)$ について

$$\begin{pmatrix}u(x_i+at,y_i+bt)\\ v(x_i+at,y_i+bt)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u(x_i,y_i)\\ v(x_i,y_i)\end{pmatrix} + at\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix} + bt\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\varepsilon_1(x_i,y_i,at,bt)\\ \varepsilon_2(x_i,y_i,at,bt)\end{pmatrix}$$

ここで、偏微分は (x_i,y_i) での値である。$|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|$ は、A 上で u, v の２階微分の絶対値が M 以下であるとすると、それぞれ、$M\|\vec{r}\|^2t^2$ 以下であるから、

$$\sqrt{(\varepsilon_1(x_i,y_i,at,bt))^2 + (\varepsilon_2(x_i,y_i,at,bt))^2} \leqq \sqrt{2}t^2(a^2+b^2)M$$

となる。小正方形上では $t^2(a^2+b^2) \leqq \dfrac{2}{N^2}$ である。小正方形 $[x_i-\frac{1}{N}, x_i+\frac{1}{N}]\times[y_i-\frac{1}{N}, y_i+\frac{1}{N}]$ の $\begin{pmatrix} u(x_i,y_i) \\ v(x_i,y_i)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_i \\ y-y_i\end{pmatrix}$ による像の小平行四辺形を考える。小正方形の像と小平行四辺形の位置関係を考えると、上の評価式から、小正方形の辺の像は小平行四辺形の辺から距離 $\dfrac{2\sqrt{2}M}{N^2} \leqq \dfrac{3M}{N^2}$ 以下にあることがわかる。



小平行四辺形の辺の長さは $\dfrac{2}{N}\sqrt{(\dfrac{\partial u}{\partial x})^2+(\dfrac{\partial v}{\partial x})^2}$ および $\dfrac{2}{N}\sqrt{(\dfrac{\partial u}{\partial y})^2+(\dfrac{\partial v}{\partial y})^2}$ である。次のように A 上で u, v の偏微分の絶対値の大きさを評価しておく。

$$|\frac{\partial u}{\partial x}| \leqq K, \quad |\frac{\partial u}{\partial y}| \leqq K, \quad |\frac{\partial v}{\partial x}| \leqq K, \quad |\frac{\partial v}{\partial y}| \leqq K.$$

そうすると小平行四辺形の辺の長さはともに $\dfrac{2\sqrt{2}K}{N} \leqq \dfrac{3K}{N}$ より小さいと考えてよい。従って、小正方形の像の面積は $\dfrac{4}{N^2}|\det J| - 4(\dfrac{3K}{N}+2\dfrac{3M}{N^2})\dfrac{3M}{N^2}$ より大きく $\dfrac{4}{N^2}|\det J| + 4(\dfrac{3K}{N}+2\dfrac{3M}{N^2})\dfrac{3M}{N^2}$ より小さい。ただし $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$ である。関数 $f(u,v)$ の積分は $\max\{f(u,v),0\}, -\min\{f(u,v),0\}$ の積分の差として得られるから、負にならない関数 $f(u,v)$ だけを考える。

関数 $f(u,v)$ の積分は、一方で、B を小正方形に分割して、小正方形の面積と小正方形上の $f(u,v)$ の最大値または最小値の積の和の極限である。これが定理の左辺を与える。$f(u,v)$ の積分は、他方で、B を A の小正方形の像で分割し、小正方形の像を小平行四辺形に置き換えて考えると、小正方形の像における $f(u,v)$ の最大値と $\dfrac{4}{N^2}|\det J| + 4(\dfrac{3K}{N}+2\dfrac{3M}{N^2})\dfrac{3M}{N^2}$ の積の N^2 個の和の極限と小正方形の像における $f(u,v)$ の最小値と $\dfrac{4}{N^2}|\det J| - 4(\dfrac{3K}{N}+2\dfrac{3M}{N^2})\dfrac{3M}{N^2}$ の積の N^2 個の和の極限にはさまれる実数であるが，分割を細かくすると、$\dfrac{4}{N^2}|\det J|$ と $f(u,v)$ の小正方形の像における最大値または最小値の積の和は、$\displaystyle\int_A f(u(x,y),v(x,y))|\det J|\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ に収束し、誤差の項は $f(u,v)$ の B での最大値を C とすると、小正方形の個数は $\dfrac{L^2N^2}{4}$ 個以下であったから、$4(\dfrac{3K}{N}+2\dfrac{3M}{N^2})\dfrac{3M}{N^2}C\dfrac{L^2N^2}{4}$ よりも小であるが これは $N \longrightarrow \infty$ のとき 0 に収束する。これが定理の右辺を与える。