

演習問題1 . (1) 2次元トーラス T^2 の定義を与え、 T^2 が多様体であることを示せ。
 (2) 実射影平面 $\mathbf{R}P^2$ の定義を与え、 $\mathbf{R}P^2$ が多様体であることを示せ。

演習問題2 . 閉区間 $[0, 1]$ を I で表す。 n 次元立方体 $I^n = \overbrace{I \times \cdots \times I}^n = [0, 1]^n$ の内部は、开区間 $(0, 1)$ の直積 $(0, 1)^n$ であり、境界は $\partial I^n = [0, 1]^n \setminus (0, 1)^n$ である。基点付きの位相空間 (X, b_X) に対し、空間対 $(I^n, \partial I^n)$ からの連続写像の全体 $\text{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ を考える。
 $f_1, f_2 \in \text{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ に対し、 $f_1 \natural f_2$ を次で定義する。

$$(f_1 \natural f_2)(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f_1(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{if } t_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ f_2(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{if } t_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

空間対の写像のホモトピー類の集合 $[(I^n, \partial I^n), (X, b_X)]$ を $\pi_n(X, b_X)$ と書く。
 $\pi_n(X, b_X) = [(I^n, \partial I^n), (X, b_X)]$ の元の演算 $(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \alpha_1 \alpha_2$ を $\alpha_1 = [f_1], \alpha_2 = [f_2]$ となる f_1, f_2 を使って、 $\alpha_1 \alpha_2 = [f_1 \natural f_2]$ で定義する。

- (1) 上の演算が適切に定義されている (well defined) とはどういうことか？ また演算が定義できていることを確かめよ。
- (2) この演算について、結合律が成り立つことを示せ。
- (3) b_X への定値写像を c とする。 c のホモトピー類 $[c]$ が上の演算の単位元であることを示せ。
- (4) $f \in \text{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ に対し、 $\bar{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$ とおくと、上の演算について、ホモトピー類 $[f]$ の逆元がホモトピー類 $[\bar{f}]$ で与えられることを示せ。

問題 . $n \geq 2$ のとき、 $\pi_n(X, b_X)$ は可換群であることを示せ。

問題 . k を 2 以上の自然数とする。 $S^{k-1} = \{x \in \mathbf{R}^k \mid \|x\| = 1\}$, $D^k = \{x \in \mathbf{R}^k \mid \|x\| \leq 1\}$ とする。弧状連結な空間 X とその上の点 b_X を考える。「 $\pi_{k-1}(X, b_X)$ が単位群であること」と「任意の写像 $f : S^{k-1} \rightarrow X$ に対し、 $g : D^k \rightarrow X$ で $g|_{\partial D^k} = f$ を満たすものが存在すること」は同値であることを示せ。