２００１年度幾何学 II 演習問題　　１２月１７日

演習問題１． チェイン複体 $0 \leftarrow C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \xleftarrow{\partial} \cdots \xleftarrow{\partial} C_n \leftarrow 0$ の各 C_i は有限生成自由加群 $\mathbf{Z}^{k(i)}$ に同型であるとする。このとき、各々の C_i の基底を定めると ∂ は整数を要素とする行列で表される。

(1) 同じ ∂ を実数 $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間 $C_i \otimes \mathbf{R} \cong \mathbf{R}^{k(i)}$ に作用させると、チェイン複体 $0 \leftarrow C_0 \otimes \mathbf{R} \xleftarrow{\partial} C_1 \otimes \mathbf{R} \xleftarrow{\partial} \cdots \xleftarrow{\partial} C_n \otimes \mathbf{R} \leftarrow 0$ を得る。このとき、

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim H_i(C_* \otimes \mathbf{R}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim C_i \otimes \mathbf{R} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i k(i)$$

を示せ。

（$\mathbf{R}$ のかわりに、有理数 $\mathbf{Q}$, 有限体 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ について、同様の構成 $C_* \otimes \mathbf{Q}$, $C_* \otimes \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ を考えても、同じである。）

(2) 有限生成自由加群 $C_i \cong \mathbf{Z}^{k(i)}$ の基底をうまく取ると、

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & & & & & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & & & & m_1 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 0 & \cdots & m_r \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}$$ は正方行列とは限らない

$m_1 | m_2 | \cdots | m_r$ のように書かれる。（行列の基本変形）

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{rank} H_i(C_*) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{rank} C_i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i k(i)$$

を示せ。

(3) 同じ行列を、行ベクトルに作用させたと見て、$0 \to C^0 \xrightarrow{\delta} C^1 \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} C^n \to 0$ を得る。$\delta \circ \delta = 0$ だから、コホモロジー群 $H^k(C^*)$ が定義される。(1), (2) と同様の等式を示せ。

(4) $H^k(C^* \otimes \mathbf{R}) = H^k(\mathrm{Hom}(C_*; \mathbf{R}))$ と $H_k(C_* \otimes \mathbf{R})$ の次元は等しいことを示せ。

(5) 射影平面 $\mathbf{R}P^2$ に付随するチェイン複体 $0 \leftarrow \mathbf{Z} \xleftarrow[\partial]{0} \mathbf{Z} \xleftarrow[\partial]{2} \mathbf{Z} \leftarrow 0$ およびコチェイン複体 $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow[\delta]{0} \mathbf{Z} \xrightarrow[\delta]{2} \mathbf{Z} \to 0$ について、$\otimes \mathbf{Q}$ の場合、$\otimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ の場合に上の等式を確かめよ。

問題． コホモロジー理論を公理的に構成するための公理を述べよ。

有限単体複体 K の頂点のなす有限集合を V, k 単体の集合を S_k とする。

k 単体 $\sigma = \langle v_0 \dots v_k\rangle$ の重心は $b_\sigma = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{k} v_i$ で与えられる点である。

σ をそのすべての面 τ とともに、単体複体と見て、
頂点の集合を $\{b_\tau \mid \tau \prec \sigma\}$,
面の集合を、$\{\sigma_{\tau_0\tau_1\dots\tau_j} = \langle b_{\tau_0} b_{\tau_1} \dots b_{\tau_j}\rangle \mid \tau_0 \prec \tau_1 \prec \cdots \prec \tau_j\}$ としたものを σ の重心細分と呼ぶ。

単体複体 K に対し、単体複体 $sd(K)$ が各単体を重心細分したものを合わせたものとして定義される。K の重心細分と呼ぶ。

$sd : C_k(K) \longrightarrow C_k(sd(K))$ を次で定義する。

$$sd(\sigma) = \sum_{\tau_0 \prec \tau_1 \prec \cdots \prec \tau_k} \mathrm{sign}(\tau_0\tau_1\dots\tau_k)\sigma_{\tau_0\tau_1\dots\tau_k}$$

ただし、$|\tau_j| = |\langle v_{i_0} \dots v_{i_j}\rangle|$ となるように i_j をとって、$\mathrm{sign}(\tau_0\tau_1\dots\tau_k) = \mathrm{sign}(i_0 \dots i_k)$ とする。

問題 (0) 1つの単体 σ, その重心細分に対するチェイン複体を書き下し、ホモロジー群は1点のホモロジー群と等しいことを示せ。

(1) 単体複体 K に対し、$sd \circ \partial = \partial \circ sd$ を示せ。

(2) sd は $H_*(K) \longrightarrow H_*(sd(K))$ の同型を導くことを以下の手順で示せ。

(2-1) K の単体の個数についての帰納法を用いる。

(2-2) K' を K の最大次元の単体 σ(の内部) を取り除いたものとする。

(2-3)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \to & C_2(K'\cap\sigma) & \xrightarrow{(i_{K'},\, i_\sigma)} & C_2(K')\oplus C_2(\sigma) & \xrightarrow{j_{K'} - j_\sigma} & C_2(K) & \to & 0 \\
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \to & C_1(K'\cap\sigma) & \xrightarrow{(i_{K'},\, i_\sigma)} & C_1(K')\oplus C_1(\sigma) & \xrightarrow{j_{K'} - j_\sigma} & C_1(K) & \to & 0 \\
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \to & C_0(K'\cap\sigma) & \xrightarrow{(i_{K'},\, i_\sigma)} & C_0(K')\oplus C_0(\sigma) & \xrightarrow{j_{K'} - j_\sigma} & C_0(K) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

とこれに sd を施したものから得られるマイヤー・ビエトリスの完全列の間に sd_* が誘導される。

$$\begin{array}{ccccccccc}
\xrightarrow{\Delta_*} & H_j(K'\cap\sigma) & \xrightarrow{(i_{K'*},\, i_{\sigma*})} & H_j(K')\oplus H_j(\sigma) & \xrightarrow{j_{K'*} - j_{\sigma*}} & H_j(K) & \xrightarrow{\Delta_*} & H_{j-1}(K'\cap\sigma) \\
 & \downarrow sd & & & & \downarrow sd & & \downarrow sd \\
\xrightarrow{\Delta_*} & H_j(sd(K')\cap sd(\sigma)) & \xrightarrow{(i_{sd(K')*},\, i_{sd(\sigma)*})} & H_j(sd(K'))\oplus H_j(sd(\sigma)) & \xrightarrow{j_{sd(K')*} - j_{sd(\sigma)*}} & H_j(sd(K)) & \xrightarrow{\Delta_*} & H_{j-1}(sd(K')\cap sd(\sigma))
\end{array}$$

(2-4) five lemma を使う。