２００１年度幾何学 II 演習問題　　１月７日

演習問題１. X を $S^1\times D^2$ と微分同相な S^3 の部分集合とする。$S^3-\mathrm{Int}X$ のホモロジー群を求めよ。ここで、$\mathrm{Int}X=X-\partial X$ とする。

演習問題２. 2 つの n 次元多様体 $M_1,\,M_2$ に対しそれらの連結和を次のように定義する。$M_1,\,M_2$ に含まれる n 次元閉球体を $D_1,\,D_2$ とし

$$M_1\#M_2=(M_1-\mathrm{Int}D_1)\sqcup(M_2-\mathrm{Int}D_2)/\sim$$

但し、$x\in\partial(M_1-\mathrm{Int}D_1)=\partial D_1\cong S^{n-1}$, $y\in\partial(M_2-\mathrm{Int}D_2)=\partial D_2\cong S^{n-1}$ に対し、 $x\sim y\Longleftrightarrow x=\overline{y}$ ($\overline{(y_1,y_2,...,y_n)}=(-y_1,y_2,...,y_n)$) とする。$M_1\#M_2$ の整数係数ホモロジー群を $M_1,\,M_2$ の整数係数ホモロジー群であらわせ。

問題. $A:T^2\longrightarrow T^2$ を $\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}\in GL(2,\mathbf{Z})$ の $\mathbf{R}^2$ への作用から引き起こされる同相写像とするとき, 次の空間の整数係数ホモロジー群を計算せよ.

$$X=T^2\times[0,1]/\sim$$

但し, $(x,0)\in T^2\times\{0\}$, $(y,1)\in T^2\times\{1\}$ に対し, $(x,0)\sim(y,1)\Longleftrightarrow x=A(y)$ とする.

問題. $A:S^1\times S^1\longrightarrow S^1\times S^1$ を $\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}\in GL(2,\mathbf{Z})$ の $\mathbf{R}^2$ への作用から引き起こされる同相写像とするとき、次の空間の整数係数ホモロジー群を計算せよ.

$$X=(D^2\times S^1)_1\sqcup(D^2\times S^1)_2/\sim$$

但し, $x\in\partial(D^2\times S^1)_1\cong\partial D^2\times S^1$, $y\in(\partial D^2\times S^1)_2\cong\partial D^2\times S^1$ に対し, $x\sim y\Longleftrightarrow x=A(y)$ とする.

問題. 任意の有限生成アーベル群 G に対し、連結 3 次元多様体 M で $H_1(M;\mathbf{Z})=G$ をみたすものが存在することを示せ。