２００１年度幾何学II演習問題　　１月２１日

演習問題１. n を正の整数とする。
$n+1$ 次元球面 $S^{n+1} = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \mathbf{R}^{n+2} \mid \|x\|^2 = 1\}$,
上半球面 $S^{n+1}_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in S^{n+1} \mid x_{n+2} \geqq 0\}$,
下半球面 $S^{n+1}_- = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in S^{n+1} \mid x_{n+2} \leqq 0\}$,
を考える。$S^n = S^{n+1}_+ \cap S^{n+1}_-$ とする。

(1) $F : S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$ が、$F(S^{n+1}_+) \subset S^{n+1}_+$, $F(S^{n+1}_-) \subset S^{n+1}_-$ を満たすとする。
$\mathrm{deg} F = \mathrm{deg}(F|S^n)$ を示せ。

(2) $F_0 : S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$, $F_1 : S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$ が、
$F_0(S^{n+1}_+) \subset S^{n+1}_+$, $F_0(S^{n+1}_-) \subset S^{n+1}_-$, $F_1(S^{n+1}_+) \subset S^{n+1}_+$, $F_1(S^{n+1}_-) \subset S^{n+1}_-$ を満たし、$F_0|S^n \simeq F_1|S^n : S^n \longrightarrow S^n$ とすると、$F_0 \simeq F_1 : S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$ となることを示せ。
ヒント：$F_0, F_1 : (D^{n+1}, \partial D^{n+1}) \longrightarrow (D^{n+1}, \partial D^{n+1})$ に対して、
$F_0|\partial D^{n+1} = F_1|\partial D^{n+1}$ ならば、F_0, F_1 の間の対の写像としてのホモトピーは容易に作られる。一方、$F_0 : (D^{n+1}, \partial D^{n+1}) \longrightarrow (D^{n+1}, \partial D^{n+1})$ と $F_0|\partial D^{n+1}$ のホモトピー $h : [0,1] \times \partial D^{n+1} \longrightarrow \partial D^{n+1}$ に対して、これを拡張する F_0 のホモトピー $H : [0,1] \times D^{n+1} \longrightarrow D^{n+1}$ がある。これらを組み合わせる。

演習問題２. X を 2 次元有限胞複体とし、X の頂点はただ１つであるとする。すなわち、

$$X = e^0 \cup e^1_1 \cup e^1_2 \cup \ldots \cup e^1_\ell \cup e^2_1 \cup e^2_2 \cup \ldots \cup e^2_m.$$

このとき次を示せ。
(1)　$\pi_1(X, e_0) = \langle e^1_\lambda;\ \lambda = 1, \ldots, \ell\ :\ \partial e^2_\mu;\ \mu = 1, \ldots, m \rangle$
但し、e^1_λ $(\lambda = 1, \ldots, \ell)$ は生成元であり、∂e^2_μ は、e^2_μ の接着写像

$$S^1 = \partial D^2 \longrightarrow X^{(1)} = e^0 \cup e^1_1 \cup e^1_2 \cup \ldots \cup e^1_\ell$$

のホモトピー類が定める $\pi_1(X^{(1)}, e_0)$ の元 (の共役類) をあらわすワードである。
(2)　$H_1(X; \mathbf{Z}) = (\bigoplus_{\lambda=1}^{\ell} \mathbf{Z} e^1_\lambda) / (\bigoplus_{\mu=1}^{m} \mathbf{Z}(\partial e^2_\mu))$
但し、∂e^2_μ は、e^2_μ の接着写像 $\partial D^2 \longrightarrow X^{(1)}$ による、$H_1(S^1)$ の生成元の $H_1(X^{(1)}, e_0)$ における像である。
(3)　$H_1(X; \mathbf{Z}) = \pi_1(X, e_0) / [\pi_1(X, e_0), \pi_1(X, e_0)]$.