２００１年度幾何学 II 演習問題　　１０月２２日

円周 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ について、射影を $p : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ とおく。

演習問題１. ２つの連続関数 $\widetilde{f_1}, \widetilde{f_2} : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ が、$p \circ \widetilde{f_1} = p \circ \widetilde{f_2}$ を満たすならば、ある整数 n があって、$\widetilde{f_1}(x) = \widetilde{f_2}(x) + n$ となることを示せ。

演習問題２. 閉区間 $[0,1]$ から円周への連続写像 $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ に対し、連続写像 $\widetilde{f} : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ で $p \circ \widetilde{f} = f$ を満たすものがあることを示せ。
（ヒント：以下の手順に従うと良い。）

(1) 円周を次の３個の開区間で被覆する。

$$V_0 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \bmod 1, \quad V_1 = (0, \frac{2}{3}) \bmod 1, \quad V_2 = (-\frac{2}{3}, 0) \bmod 1$$

ある正実数 δ に対し、定義域 $[0,1]$ の各点 x の δ 近傍 $B_x(\delta)$ の像 $f(B_x(\delta))$ は、V_0, V_1, V_2 のどれかに含まれることを示せ。
ヒント：定義域 $[0,1]$ の開被覆 $U_i = f^{-1}(V_i)$ を考えるとよい。（裏面「問題」参照。）

(2) (1) で得られる δ に対し、$\dfrac{1}{N} < \delta$ となる自然数 N をとり、$[0,1]$ 区間を N 等分すると、各区間 $[\dfrac{m-1}{N}, \dfrac{m}{N}]$ $(m = 1, \dots, N)$ に対し、$\widetilde{f}_m : [\dfrac{m-1}{N}, \dfrac{m}{N}] \longrightarrow \mathbf{R}$ で、$p \circ \widetilde{f}_m = f\big|_{[\frac{m-1}{N}, \frac{m}{N}]}$ を満たすものが存在することを示せ。

(3) 求める $\widetilde{f}$ を構成せよ。

演習問題３. 正方形 $[0,1]^2$ から円周への連続写像 $F : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ に対し、連続写像 $\widetilde{F} : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ で $p \circ \widetilde{F} = F$ を満たすものがあることを示せ。
（ヒント：演習問題２と同様の手順に従うと良い。）

演習問題４. $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ に対し、$b_{S^1} = 0 \mod 1$ とする。
連続関数 $f : ([0,1], \{0,1\}) \longrightarrow (S^1, b_{S^1})$ に対し、連続写像 $\widetilde{f} : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ で、$p \circ \widetilde{f} = f$ かつ $\widetilde{f}(0) = 0$ となるものをとることができる。$h(f) = \widetilde{f}(1)$ とおくと $h(f) \in \mathbf{Z}$ である。写像 $h : \mathrm{Map}(([0,1], \{0,1\}), (S^1, b_{S^1})) \longrightarrow \mathbf{Z}$ について、$f_1 \simeq f_2 : ([0,1], \{0,1\}) \longrightarrow (S^1, b_{S^1})$ ならば $h(f_1) = h(f_2)$ であることを示せ。

演習問題５. 上の h により写像 $\varphi : \pi_1(S^1, b_{S^1}) = [([0,1], \{0,1\}), (S^1, b_{S^1})] \longrightarrow \mathbf{Z}$ が定義される。

(1) φ は準同型写像であることを示せ。

(2) φ は同型写像であることを示せ。

問題. (1) 距離空間 X の部分集合 A に対し、X 上の関数 $d_A(x)$ を $d_A(x) = \inf_{a \in A} \mathrm{dist}(x, a)$ で定義する。$d_A : X \longrightarrow \mathbf{R}$ は連続であることを示せ。
(2) X 上の実数値連続関数 $f_1, \ldots, f_k$ に対し、$F(x) = \max_k f_k(x)$ で定義される関数 $F : X \longrightarrow \mathbf{R}$ は連続であることを示せ。
(3) コンパクト距離空間 X 上の有限開被覆 $\{U_1, \ldots, U_k\}$ に対し、次を満たす正実数 δ が存在することを示せ。（δ をルベーグ数と呼ぶ。）
すべての点 $x \in X$ の δ 近傍 $B_x(\delta)$ は、ある開集合 U_j $(j \in \{1, \ldots, k\})$ に含まれる。