２００１年度幾何学 II 演習問題　　１１月５日

ホモロジー理論の公理は、以下のもの。

- （位相空間対，連続写像）から（次数つき $\mathbf{Z}$ 加群，準同型写像）への共変関手である。
- 連続写像がホモトピックなら誘導される準同型は一致する。（ホモトピー公理）
- 対の完全列があり、連結準同型は自然性を持つ。
- $X \supset A \supset B$, A 開集合、B 閉集合のとき、$H_*(X \setminus B, A \setminus B) \cong H_*(X, A)$（切除公理）
- $H_*(１点) \cong \mathbf{Z}\ (* = 0), \cong 0\ (* \neq 0)$.（次元公理）

演習問題１． $X \supset A \supset B$, A 閉集合、B 開集合のとき、$A \setminus B$ を含む開集合 U で、包含写像 $(X, A) \longrightarrow (X, A \cup U)$, $(X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow ((X \setminus B) \cup U, U)$ がホモトピー同値となるものがあれば、$H_*(X \setminus B, A \setminus B) \cong H_*(X, A)$ となることを示せ。

演習問題２． (1)　ホモロジー理論の公理から、$H_*([0,1], \{b\})$ を求めよ。ただし、$b \in [0,1]$.
(2)　空間対 $([0,1], \{0\})$, $([0,1], \{1\})$ のホモロジー完全列と空間対 $([0,1], \{0,1\})$ のホモロジー完全列を比較して、$H_*([0,1], \{0,1\})$ を求めよ。

演習問題３． $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \bigm| {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1\}$,
$S^1_+ = \{x = (x_1, x_2) \in S^1 \bigm| x_2 \geqq 0\}$, $S^1_- = \{x = (x_1, x_2) \in S^1 \bigm| x_2 \leqq 0\}$ とする。
$(S^1_+, \partial S^1_+)$ と $(S^1_-, \partial S^1_-)$ のホモロジー完全列は、$([0,1], \{0,1\})$ のホモロジー完全列と同じとみなせる。空間対 $(S^1_+, \partial S^1_+)$, (S^1, S^1_-) のホモロジー完全列を比較し、$H_*(S^1, S^1_-) \cong H_*(S^1_+, \partial S^1_+)$ に注意して、$H_*(S^1)$ を求めよ。

演習問題４． $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \bigm| \|x\| \leq 1\}$, $S^{n-1} = \partial D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \bigm| \|x\| = 1\}$,
$S^{n-1}_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1} \bigm| x_n \geqq 0\}$,
$S^{n-1}_- = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1} \bigm| x_n \leqq 0\}$ とする。
(1) $H_*(D^2, \partial D^2)$ を求めよ。
(2) $H_*(S^2)$ を求めよ。
(3) $H_*(D^3, \partial D^3)$ を求めよ。
(4) $H_*(S^3)$ を求めよ。

問題. n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ は、次元が異なれば同相でないことを示せ。

問題. $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ とするとき、連続写像 $r : D^n \longrightarrow S^{n-1}$ で $r|S^{n-1} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ をみたすものは存在しないことを示せ。
ヒント：包含写像 $i : S^{n-1} \longrightarrow D^n$ との結合を考える。

問題. すべての連続写像 $f : D^n \longrightarrow D^n$ に対し、$f(x) = x$ となる $x \in D^n$ が存在することを示せ。
ヒント：すべての点で $f(x) \neq x$ と仮定して、$f(x), x$ を結ぶ直線と、∂D^n の交点の一方を x の関数として考える。

問題. 連続写像 $f : S^n \longrightarrow S^n$ が全射でないならば、$\deg\, f = 0$ を示せ。ただし、$\deg\, f$ は $H_n(S^n; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ の生成元 1 を固定して、$f_*(1) = n \cdot 1$ のとき、$\deg\, f = n$ と定義する。