２００１年度幾何学 II 演習問題　　１１月１９日

演習問題１． 正方形 Q の４つの辺のうちの２つをとり、辺と辺とを同相写像で同一視する。残りの２つの辺を同相写像で同一視する。得られる空間は何通りあるか。同相なものは１つと数える。
ヒント：隣り合わせの辺を同一視するか、向かい合わせの辺を同一視するかで、分け、同一視が正方形から導かれる辺の向きを保つか保たないかで分類する。

演習問題２． 演習問題１で得られた空間のホモロジー群を求めよ。

演習問題３． １次元胞複体 X は、頂点の有限集合 $X^{(0)} = \{v_1, \ldots, v_{k(0)}\}$ および辺の集合 $\{e_1, \ldots, e_{k(1)}\}$ $(e_i \approx [-1, 1])$ について、各 e_i の境界 ∂e_i と $X^{(0)} = \{v_1, \ldots, v_{k(0)}\}$ の点との同一視 $a_i^1 : \partial e_i \longrightarrow X^{(0)}$ が与えられたものである。

$$X = X^{(0)} \cup e_1 \cup \cdots \cup e_{k(1)}$$

１次元連結有限胞複体のホモロジー群を求めよ。
ヒント：$(X, X^{(0)})$ のホモロジー完全列において、$H_1(X, X^{(0)}) \xrightarrow{\partial_*} H_0(X^{(0)})$ は、準同型 $\mathbf{Z}^{k(1)} \longrightarrow \mathbf{Z}^{k(0)}$ である。
また、$H_0(\{v_i\}) \longrightarrow H_0(X)$ の像と $H_0(\{v_j\}) \longrightarrow H_0(X)$ の像は、$a_\ell^1(\partial e_\ell) = \{v_i, v_j\}$ となる e_ℓ があれば一致する。
一方、連結を仮定している。

問題． １次元連結有限胞複体ののホモトピー同値類はオイラー数で分類されることを示せ。

問題． (1) 演習問題１で得られた空間は２次元微分可能多様体と同相になることを示せ。
(2) 演習問題１で得られた２次元多様体は向き付け可能かどうか判定せよ。

問題． 曲面の種数（ジーナス genus）とは、曲面の中に、その補空間が連結であるように同時に埋め込むことができる単純閉曲線の個数の最大値である。（単純閉曲線とは、部分多様体として埋め込まれた円周のことである。）
演習問題１で得られた２次元多様体の種数を求めよ。

問題． $2n$ 角形の辺を２つずつ貼り合わせて得られる図形は、２次元多様体になることを示せ。
種数 g の向き付け可能な２次元多様体を構成するのはどうすればよいか。
種数 g の向き付け不可能な２次元多様体を構成するのはどうすればよいか。