２００１年度幾何学 II 演習問題　　１１月２６日

演習問題１． $n \geqq 2$ とする。n 次元の円板 $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leqq 1\}$ の境界を ∂D^n とする。微分同相写像 $f : (D^n, \partial D^n) \longrightarrow (D^n, \partial D^n)$ について、
$f|\partial D^n : \partial D^n \longrightarrow \partial D^n$ は f の ∂D^n への制限を表す。
(1)　$f : D^n \longrightarrow D^n$, $f|\partial D^n : \partial D^n \longrightarrow \partial D^n$ が向きを保つ、向きを反対にするとはどういうことか定義せよ。
(2)　f が向きを保つことと、$f|\partial D^n$ が向きを保つことは同値であることを示せ。

演習問題２． (1)　微分同相写像 $f : (D^n, \partial D^n) \longrightarrow (D^n, \partial D^n)$ $(n \geq 1)$ について、f が向きを保つことと $f_* = 1 : H_n(D^n, \partial D^n) \longrightarrow H_n(D^n, \partial D^n)$ と同値であることを示せ。
(2)　n 次元の球面 $S^n = \partial D^{n+1}$ について、微分同相写像 $g : S^n \longrightarrow S^n$ が向きを保つことと $g_* = 1 : H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n)$ と同値であることを示せ。

演習問題３． 次の空間の胞体分割を図示し、整数係数ホモロジー群を計算せよ.

(1)　$\mathbf{R}P^3 = S^3/x \sim -x$

(2)　$T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$

問題． f が同相写像の時、演習問題１を考えよ。

問題． $f : S^n \longrightarrow S^n$ に対し、点 $y \in S^n$ で次の性質を持つものがあるとする。y の D^n と同相な閉近傍 U が存在し、$f^{-1}(U)$ が連結成分 V_j $(j = 1, \ldots, k)$ の和 $f^{-1}(U) = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ であるとするとき、$f|V_i : V_i \longrightarrow U$ は同相写像である。$f|V_j$ が向きを保つ同相写像のとき $\sigma(f|V_j) = +1$, $f|V_j$ が向きを裏返す同相写像のとき $\sigma(f|V_j) = -1$ と σ を定義するとき、$\deg f = \sum_{j=1}^{k} \sigma(f|V_j)$ を示せ。

ヒント：

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup (V_j, \partial V_j) \arrow[rr] & & (S^n, S^n - \mathrm{Int} f^{-1}(U)) \arrow[r, "f"] & (S^n, S^n - U) & (U, \partial U) \arrow[l] \\
(V_j, \partial V_j) \arrow[u] \arrow[r] & (S^n, S^n - \mathrm{Int} V_j) & S^n \arrow[u] \arrow[l] \arrow[r, "f"] & S^n \arrow[u] \arrow[r] & (U, \partial U) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

が H_n に誘導する準同型を考える。