２００１年度幾何学II演習問題　　１２月３日

演習問題１． n 次元の円板 $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leqq 1\}$ の境界を ∂D^n とする。連続写像 $f_0 : D^k \longrightarrow Y$ について、$f_0|\partial D^k$ のホモトピー $\varphi : [0,1] \times \partial D^k \longrightarrow Y$, $\varphi(0,x) = f_0(x)$ $(x \in \partial D^k)$ が与えられているとすると、φ を拡張する f_0 のホモトピー $\Phi : [0,1] \times D^k \longrightarrow Y$, $\Phi(0,x) = f_0(x)$ $(x \in D^k)$ が存在することを示せ。
ヒント：$D^n = D^n{}_{\frac{2-t}{2}} \cup (D^n - \mathrm{Int}\, D^n{}_{\frac{2-t}{2}})$,
$D^n \approx D^n{}_{\frac{2-t}{2}}$, $D^n - \mathrm{Int}\, D^n{}_{\frac{2-t}{2}} \approx \partial D^n \times [0, \frac{t}{2}]$ で ∂D^n のホモトピーを追いかける。

演習問題２． チェイン写像 f_0, f_1

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \overset{\partial}{\longleftarrow} & C_0(X) & \overset{\partial}{\longleftarrow} & C_1(X) & \overset{\partial}{\longleftarrow} & C_2(X) & \overset{\partial}{\longleftarrow} \\
 & & f_0\!\downarrow\downarrow\! f_1 & & f_0\!\downarrow\downarrow\! f_1 & & f_0\!\downarrow\downarrow\! f_1 & \\
0 & \overset{\partial}{\longleftarrow} & C_0(Y) & \overset{\partial}{\longleftarrow} & C_1(Y) & \overset{\partial}{\longleftarrow} & C_2(Y) & \overset{\partial}{\longleftarrow}
\end{array}$$

に対し、$H : C_k(X) \longrightarrow C_{k+1}(Y)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \overset{\partial}{\longleftarrow} & C_0(X) & \overset{\partial}{\longleftarrow} & C_1(X) & \overset{\partial}{\longleftarrow} & C_2(X) & \overset{\partial}{\longleftarrow} \\
 & & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
0 & \overset{\partial}{\longleftarrow} & C_0(Y) & \overset{\partial}{\longleftarrow} & C_1(Y) & \overset{\partial}{\longleftarrow} & C_2(Y) & \overset{\partial}{\longleftarrow}
\end{array}$$

で、$\partial H + H\partial = f_1 - f_0$ を満たすもの（チェインホモトピー）が存在するとする。
$f_{0*} = f_{1*} : H_k(C_*(X)) \longrightarrow H_k(C_*(Y))$ を示せ。

演習問題３． $X \cup Y$ を有限胞複体とし、X, Y が $X \cup Y$ の部分胞複体とする。それぞれに対するチェイン複体の間に次の短完全列がある。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & \\
0 \to & C_2(X \cap Y) & \xrightarrow{(i_X, i_Y)} & C_2(X) \oplus C_2(Y) & \xrightarrow{j_X - j_Y} & C_2(X \cup Y) & \to 0 \\
 & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & \\
0 \to & C_1(X \cap Y) & \xrightarrow{(i_X, i_Y)} & C_1(X) \oplus C_1(Y) & \xrightarrow{j_X - j_Y} & C_1(X \cup Y) & \to 0 \\
 & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & \\
0 \to & C_0(X \cap Y) & \xrightarrow{(i_X, i_Y)} & C_0(X) \oplus C_0(Y) & \xrightarrow{j_X - j_Y} & C_0(X \cup Y) & \to 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

$i_X : X \cap Y \longrightarrow X$, $i_Y : X \cap Y \longrightarrow Y$, $j_X : X \longrightarrow X \cup Y$, $j_Y : Y \longrightarrow X \cup Y$ が誘導する写像を同じ記号で書いている。
これに付随する長完全列と $\Delta_* : H_k(X \cup Y) \longrightarrow H_{k-1}(X \cap Y)$ の定義を書け。
（マイヤー・ビエトリスの完全列。）

問題． $\mathbf{R}^2 \ni (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ に対し、同値関係 $(x_1, y_1) \sim_1 (x_2, y_2)$ を、ある整数 m, n があって $(x_2, y_2) = (x_1, y_1) + (m, n)$ となることと定義し、2次元トーラスを同値類の集合 $\mathbf{R}^2/\sim_1$ に商位相を入れたものとする。$T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ とかく。
$\mathbf{R}^2 \ni (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ に対し、同値関係 $(x_1, y_1) \sim_2 (x_2, y_2)$ を、ある整数 m, n があって $(x_2, y_2) = (x_1, y_1) + (m, n)$ または $(x_2, y_2) = -(x_1, y_1) + (m, n)$ となることと定義し、同値類の集合 $\mathbf{R}^2/\sim_2$ に商位相を入れたものを考える。
(1) $\mathbf{R}^2/\sim_2 \approx S^2$ を示せ。
(2) $(x_1, y_1) \sim_1 (x_2, y_2)$ ならば $(x_1, y_1) \sim_2 (x_2, y_2)$ であるから、$\mathbf{R}^2/\sim_1 \longrightarrow \mathbf{R}^2/\sim_2$ が定義される。この写像 $p : T^2 \longrightarrow S^2$ がホモロジーに誘導する写像を求めよ。
この写像を胞体写像とする胞体分割、写像の様子を図示せよ。

問題． チェイン複体の短完全列

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{i} & B_2 & \xrightarrow{j} & C_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{i} & B_1 & \xrightarrow{j} & C_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \longrightarrow & A_0 & \xrightarrow{i} & B_0 & \xrightarrow{j} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

があるとき、$\partial_* : H_k(C_*) \longrightarrow H_{k-1}(A_*)$ が定義され、ホモロジーの長完全列

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & H_2(A_*) & \xrightarrow{i_*} & H_2(B_*) & \xrightarrow{j_*} & H_2(C_*) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_1(A_*) & \xrightarrow{i_*} & H_1(B_*) & \xrightarrow{j_*} & H_1(C_*) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_0(A_*) & \xrightarrow{i_*} & H_0(B_*) & \xrightarrow{j_*} & H_0(C_*) & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

が得られることを示せ。