２００１年度幾何学II演習問題　　１２月１０日

演習問題１． $\mathbf{C}P^2 = (\mathbf{C}^3 - \{0\})/\mathbf{C}^\times$ の胞体分割 $e^0 \cup e^2 \cup e^4$ を定めよ。このときの接着写像 $\partial D^4 \longrightarrow S^2 = e^0 \cup e^2$ を表せ。

演習問題２． $S^2 \times S^2$ の胞体分割を定め、ホモロジー群を求めよ。
$\mathbf{R}P^2 \times \mathbf{R}P^2$ の胞体分割を定め、ホモロジー群を求めよ。

演習問題３． 有限生成アーベル群 A に対し、
$0 \longrightarrow \mathbf{Z}^m \longrightarrow \mathbf{Z}^n \longrightarrow A \longrightarrow 0$ が完全となるように $\mathbf{Z}^m \longrightarrow \mathbf{Z}^n$ をとる。
このとき、$B^m \longrightarrow B^n \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow 0$ は完全。
$\mathrm{Tor}(A, B)$ を $0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(A, B) \longrightarrow B^m \longrightarrow B^n \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow 0$ が完全となるように定義する。
$\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ を求めよ。

問題． $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ は $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ に作用する。A のホモロジー群への作用 A_* を求めよ。

問題． $\mathbf{Z}$ 上のテンソル積 $\otimes$ を考える。加群（アーベル群）の完全列
$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A' \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ に対し、$A \otimes B \xrightarrow{i \otimes B} A' \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B \longrightarrow 0$ は完全であることを示せ。
ヒント：(1) $A \otimes B = A \times B/\sim$ ($\sim$ は $n \in \mathbf{Z}$ に対し $(na, b) \sim (a, nb)$ から生成される同値関係) と定義される。(a, b) の同値類を $a \otimes b$ と書く。準同型 $A \longrightarrow A'$ に対し、$A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B$ が定義される。問題のうち、$A' \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B \longrightarrow 0$ は、この定義から従う。
(2) $K = \ker(A' \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B)$ とする。$a'' \otimes b \longmapsto a' \otimes b \bmod (i \otimes B)(A \otimes B)$ により、$A'' \otimes B \longrightarrow A' \otimes B/(i \otimes B)(A \otimes B)$ が定義される。$(i \otimes B)(A \otimes B) \subset K$.
$A' \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B \longrightarrow A' \otimes B/(i \otimes B)(A \otimes B)$ は射影
$A' \otimes B \longrightarrow A' \otimes B/(i \otimes B)(A \otimes B)$ と一致する。$K \subset A \otimes B$.

有限単体複体 K は、頂点のなす有限集合 V と $k=1,\dots,n$ に対して、$k+1$ 個の頂点によって定まる k 単体の集合 S_k が定まっているものである。ただし、k 単体 σ の頂点の部分集合で定まる単体 (フェイス face) は必ず単体の集合に含まれているとする。K の単体 τ が K の単体 σ のフェイスであることを $\tau \prec \sigma$ と書く。
頂点 $v_0,\dots,v_k$ で定まる k 単体を $\langle v_0 \dots v_k\rangle$ と書く。k 単体 $\langle v_0 \dots v_k\rangle$ 上の点は $0 \leqq t_i \leqq 1$ $(i=1,\dots,k)$ で $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$ を満たす実数 t_i と頂点 v_i の形式和 $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} t_i v_i$ で表される。
仮に v_i $(i=1,\dots,k)$ を十分次元の高い実線形空間内の 1 次独立なベクトルとすると、和 $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} t_i v_i$ は $\{v_0,\dots,v_k\}$ の凸包となる。実際に頂点の集合を異なる単体の内部が交わらないように実線形空間内に実現して考えることのほうが多い。実現された位相空間を $|K|$ と書く。
K の単体 σ のスター $\mathrm{Star}(\sigma)$ を σ をフェイスとする単体の全体（の実現）とする。$\displaystyle\mathrm{Star}(\sigma) = \bigcup_{\sigma \prec \tau} |\tau|$ とする。

問題． $\displaystyle\mathrm{Star}(\langle v_0 \dots v_k\rangle) = \bigcap_{i=0}^{k} \mathrm{Star}(v_i)$ を示せ。
（これは右辺が空でなければ、左辺の k 単体が存在等号が成立するという意味でも正しい。）
問題． $\mathrm{Star}(\sigma)$ の任意の点 p と σ 上の任意の点 q を結ぶ線分 $(1-t)p+tq$ $(t\in[0,1])$ が定義できることを示せ。

２つの単体複体 K_1, K_2 に対して、$f_V : V(K_1) \longrightarrow V(K_2)$ が、K_1 の各単体の頂点の集合 $\{v_0,\dots,v_k\}$ の像 $f_V(\{v_0,\dots,v_k\})$ が K_2 の単体の頂点の集合となるという条件を満たすとき、単体写像という。実現された単体複体では $\displaystyle f(\sum_{i=0}^{k} t_i v_i) = \sum_{i=0}^{k} t_i f_V(v_i)$ と考えられる。単体の像は次元が低いか等しい単体となる。

問題． $g : |K_1| \longrightarrow |K_2|$ が連続写像で、K_1 の頂点 v のスターの像 $g(\mathrm{Star}(v))$ が K_2 のある頂点 $f_V(v)$ のスターに含まれるとする。

(1) f_V は単体写像を定義することを示せ。
ヒント：$\mathrm{Star}(v) \subset g^{-1}(\mathrm{Star}(f_V(v)))$ と K_1 の単体 $\langle v_0 \dots v_k\rangle$ に対して、$\displaystyle\bigcap_{i=0}^{k} \mathrm{Star}(v_i) \neq \emptyset$ であることを使う。

(2) f_V の実現 f と g はホモトピックであることを示せ。