２００１年度幾何学 II　試験問題
２００２年２月４日　１３：００－１６：００

問題１． ３次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の部分空間

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid \left((x^2+y^2)^{1/2} - 2\right)^2 + z^2 = 1\},$$
$$D = \{(x,y,0) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqq 1\}$$

を考え、$X = T \cup D$ とする。

(1)　X の基本群を求めよ。

(2)　X の整数係数ホモロジー群を求めよ。

問題２． X を有限胞複体とする。

(1)　閉区間 $[0,1]$ と X の直積 $[0,1] \times X$ において、$\{1\} \times \{x\}$, $x \in X$ を同一視して得られる空間を CX とする。すなわち、

$$CX = [0,1] \times X / \sim$$

ただし、(t,x), $(t',x') \in [0,1] \times X$ に対し、$(t,x) \sim (t',x') \Longleftrightarrow t = t' = 1$ である。

CX は１点とホモトピー同値であることを示せ。

(2)　閉区間 $[-1,1]$ と X の直積 $[-1,1] \times X$ において、$\{1\} \times X$ を同一視し、また $\{-1\} \times X$ を同一視して得られる空間を SX とする。すなわち、

$$SX = [-1,1] \times X / \sim$$

ただし、(t,x), $(t',x') \in [-1,1] \times X$ に対し、
$(t,x) \sim (t',x') \Longleftrightarrow t = t' = -1$ または $t = t' = 1$ である。

SX の整数係数ホモロジー群 $H_i(SX)$ を X の整数係数ホモロジー群 $H_j(X)$ で表せ。

問題３． コンパクト連結２次元の多様体の例を２個、コンパクト連結３次元の多様体の例を３個与えよ。それらの定義および整数係数ホモロジー群を記せ。ホモロジー群の計算の過程を書く必要はない。

以上の問題の解答に自信のない者は、次の問に答えよ。

問Ａ． ホモロジー理論の公理を述べよ。

問Ｓ． n 次元球面のホモロジー群を記せ。

問Ｃ． チェイン複体とは何か。チェイン複体のホモロジー群とは何か。