数理科学　演習問題　２００１年７月　　担当教官: 坪井　俊

http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/users/tsuboi/suurikagaku3table2001.html

問題１．　(1)　空間上の関数 $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ の全微分 $\mathrm{d}\,f$, $\mathrm{d}\,g$ と $f\,\mathrm{d}\,g$ の外微分について、
$\mathrm{d}(\mathrm{d}\,f)=0$, $\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}\,g)=\mathrm{d}\,f\wedge\mathrm{d}\,g$ を示せ。

(2)　空間上の微分１形式 $\alpha=f_1\,\mathrm{d}\,x+g_1\,\mathrm{d}\,y+h_1\,\mathrm{d}\,z$, $\beta=f_2\,\mathrm{d}\,x+g_2\,\mathrm{d}\,y+h_2\,\mathrm{d}\,z$ について
$\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta)=(\mathrm{d}\,\alpha)\wedge\beta-\alpha\wedge(\mathrm{d}\,\beta)$ を示せ。

(3)　微分１形式 $\alpha=f\,\mathrm{d}\,x+g\,\mathrm{d}\,y+h\,\mathrm{d}\,z$ について、
$\mathrm{d}(\mathrm{d}\,\alpha)=0$ を示せ。

問題２．　平面から $(1,0)$, $(-1,0)$ の２点を除いたところで定義された微分１形式

$$\alpha=\frac{(x-1)\,\mathrm{d}\,y-y\,\mathrm{d}\,x}{(x-1)^2+y^2}-\frac{(x+1)\,\mathrm{d}\,y-y\,\mathrm{d}\,x}{(x+1)^2+y^2}=\frac{-4xy\,\mathrm{d}\,x+2(x^2-y^2-1)\,\mathrm{d}\,y}{(1+x^2+y^2)^2-4x^2}$$

についてを考える。円周 $\gamma=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\}$ に反時計回りの向き付けを考える。円周は $(1,0)$, $(-1,0)$ の２点は通過しないものとするとき、$\displaystyle\int_\gamma\alpha$ を求めよ。
ヒント：α の積分は $\dfrac{(x-1)\,\mathrm{d}\,y-y\,\mathrm{d}\,x}{(x-1)^2+y^2}$ の積分と $\dfrac{(x+1)\,\mathrm{d}\,y-y\,\mathrm{d}\,x}{(x+1)^2+y^2}$ の和である。

問題３．　３次元空間から xy 平面上の円周 $C=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2=1, z=0\}$ を除いたところで定義された微分１形式

$$\alpha=\frac{-2z\,\mathrm{d}(x^2+y^2)+2(x^2+y^2-z^2-1)\,\mathrm{d}\,z}{(1+x^2+y^2+z^2)^2-4(x^2+y^2)}$$

を考える。

(1)　$\mathrm{d}\,\alpha=0$ を示せ。

(2)　xz 平面上の円周 $\gamma=\{(x,y,z)\mid(x-x_0)^2+(z-z_0)^2=r^2, y=0\}$ に適当な向きを与えて $\displaystyle\int_\gamma\alpha$ を求めよ。ただし、円周は C と交わらないものとする。
ヒント：問題２、問題１を使う。

問題４．　３次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 上の次の微分 2 形式について、それらがある微分 1 形式の外微分になっているかどうかを判定せよ。

(1)　$\alpha=x\ \mathrm{d}\,y\wedge\mathrm{d}\,z+y\ \mathrm{d}\,z\wedge\mathrm{d}\,x+z\ \mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y$

(2)　$\beta=x\ \mathrm{d}\,y\wedge\mathrm{d}\,z+z\ \mathrm{d}\,y\wedge\mathrm{d}\,x$

問題５．　パラメータ表示された曲面

$$S = \{(x,y,z) \mid x = \xi(s,t), y = \eta(s,t), z = \zeta(s,t), s_0 \leqq s \leqq s_1, t_0 \leqq t \leqq t_1\}$$

について、その境界を γ として

$$\begin{aligned} & \int_\gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x + g(x,y,z)\,\mathrm{d}\,y + h(x,y,z)\,\mathrm{d}\,z \\ = & \int_S \mathrm{d}\bigl(f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x + g(x,y,z)\,\mathrm{d}\,y + h(x,y,z)\,\mathrm{d}\,z\bigr) \end{aligned}$$

を示せ。
ヒント：式の対称性に注意すると $\displaystyle\int_\gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x = \int_S \mathrm{d}(f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x)$ を示せばよいことがわかる。

問題６．　写像 $\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(s,y,u) \\ \eta(s,y,u) \\ \zeta(s,t,u) \end{pmatrix}$ が、直方体 $P = [s_0, s_1] \times [t_0, t_1] \times [u_0, u_1]$ からの１対１写像であり，ヤコビ行列式 $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \xi}{\partial u} \\ \frac{\partial \eta}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial u} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial s} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{pmatrix} > 0$ とする。P の像 Q について次を示せ。

$$\begin{aligned} & \int_{\partial Q} f\,\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z + g\,\mathrm{d}\,z \wedge \mathrm{d}\,x + h\,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y \\ = & \int_Q \mathrm{d}\bigl(f\,\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z + g\,\mathrm{d}\,z \wedge \mathrm{d}\,x + h\,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y\bigr) \\ = & \int_Q \bigl(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z)\bigr)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z \end{aligned}$$

ヒント：条件の対称性に注意すると $\displaystyle\int_{\partial Q} f\,\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z = \int_Q \mathrm{d}(f\,\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z) = \int_Q \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$ を示せばよいことがわかる。

問題７．　空間上の微分２形式 $\omega = f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z + g(x,y,z)\,\mathrm{d}\,z \wedge \mathrm{d}\,x + h(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y$ が $\mathrm{d}\,\omega = 0$ を満たすとする。

$$\begin{aligned} \alpha = & \ (\int_0^1 \bigl(zg(tx,ty,tz) - yh(tx,ty,tz)\bigr)t\,\mathrm{d}\,t)\,\mathrm{d}\,x \\ & +(\int_0^1 \bigl(xh(tx,ty,tz) - zf(tx,ty,tz)\bigr)t\,\mathrm{d}\,t)\,\mathrm{d}\,y \\ & +(\int_0^1 \bigl(yf(tx,ty,tz) - xg(tx,ty,tz)\bigr)t\,\mathrm{d}\,t)\,\mathrm{d}\,z \end{aligned}$$

とおくと $\mathrm{d}\,\alpha = \omega$ となることを示せ。