数理科学　演習問題　２００２年４月　　担当教官: 坪井　俊

http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/users/tsuboi/suurikagaku3table2002.html

問題１．パラメータ表示された滑らかな平面曲線 $s \longmapsto \vec{q}(s) = (\xi(s), \eta(s))$ について、接ベクトル $\vec{p}(s) = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,s}(s) = (\xi'(s), \eta'(s))$ の長さが 1 である ($\|\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,s}(s)\| = \sqrt{(\xi'(s))^2 + (\eta'(s))^2} = 1$) とする。

(1)　$\vec{n}(s) = (-\eta'(s), \xi'(s))$ と置くと、ある関数 $\kappa(s)$ があって、$\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,s}(s) = \kappa(s)\vec{n}(s)$ となることを示せ。

(2)　行列 $\begin{pmatrix} \vec{p}(s) \\ \vec{n}(s) \end{pmatrix}$ に対し、　$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\begin{pmatrix} \vec{p}(s) \\ \vec{n}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) \\ -\kappa(s) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{p}(s) \\ \vec{n}(s) \end{pmatrix}$ を示せ。

問題２．パラメータ表示された滑らかな空間曲線 $s \longmapsto \vec{q}(s) = (\xi(s), \eta(s), \zeta(s))$ について、接ベクトル $\vec{p}(s) = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,s}(s) = (\xi'(s), \eta'(s), \zeta'(s))$ の長さが 1 である
($\|\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,s}(s)\| = \sqrt{(\xi'(s))^2 + (\eta'(s))^2 + (\zeta'(s))^2} = 1$) とする。$\kappa(s) = \|\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,s}(s)\| \neq 0$ と仮定し、
$\vec{n}(s) = \dfrac{1}{\kappa(s)}\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,s}(s)$ と置く。行ベクトル $\vec{b}(s)$ を $\vec{p}(s)$, $\vec{n}(s)$ に直交する単位ベクトルであって、行ベクトルを並べて得られる行列 $\begin{pmatrix} \vec{p}(s) \\ \vec{n}(s) \\ \vec{b}(s) \end{pmatrix}$ の行列式が 1 となるものとする。

(1)　行列 $\begin{pmatrix} \vec{p}(s) \\ \vec{n}(s) \\ \vec{b}(s) \end{pmatrix}$ に対し $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\begin{pmatrix} \vec{p}(s) \\ \vec{n}(s) \\ \vec{b}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{p}(s) \\ \vec{n}(s) \\ \vec{b}(s) \end{pmatrix}$ となることを示せ。

(2)　$\kappa > 0, \tau > 0$ とするとき、曲線
$s \longmapsto \vec{q}(s) = (\dfrac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}s\,,\ \dfrac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}\cos(\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}\,s)\,,\ -\dfrac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}\sin(\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}\,s))$ について、
$\|\vec{p}(s)\| = 1,\quad \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,s}(s) \neq (0, 0, 0)$ を確かめ、上の $\vec{n}(s)$, $\vec{b}(s)$ を求め、上の微分方程式を書き下せ。
またこの曲線の概形について説明せよ。