

問題1 . 2変数関数のグラフ $z = f(x, y)$ と接平面の関係について以下の問に答えよ。

$f(x, y)$ のグラフが (x_0, y_0) をとおる平面上の直線 $(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta)$ 上でどのように変化するかをみるためには θ を直線の方向として、 $g_\theta(t) = f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta)$ の t についての微分を計算すればよい。

(1) $f(x, y)$ が2回連続微分可能として、 $t = 0$ における2階微分 $\frac{d^2 g_\theta}{dt^2}$ を計算せよ。

(2) ($\frac{d^2 g_\theta}{dt^2}$ が θ によらず常に正ならば、グラフ $z = f(x, y)$ の $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ における接平面は、接点の近傍で接点以外では $f(x, y)$ のグラフの下側にある。各点でこれが成り立つとき、グラフは下に凸であるという。)

(x_0, y_0) において、対称行列 $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ の行列式とトレースがともに正であるならば、

$f(x, y)$ のグラフは $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (の近傍) において下に凸であることを示せ。

(3) 対称行列 $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ の行列式が負ならば、グラフ $z = f(x, y)$ の $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

における接平面と、 $f(x, y)$ のグラフは、接点以外で交わることを示せ。

上の問題から、平面上の2回連続微分可能な関数 $f(x, y)$ について、 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$

$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ の行列式とトレースを見て、極大極小の判定ができることがわかる。

問題2 . $f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$ について、 $Df(x, y) = (0, 0)$ となる点 (x, y) を求めよ。 $f(x, y)$ はその点で極大であるか、極小であるか判定せよ。

問題3 . \mathbb{R}^3 内の曲面 $z = x^3 + xy$ 上の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式を求めよ。この接平面が x 軸に平行になるような点 (x_0, y_0, z_0) はどのような曲線をなすか。この曲線の yz 平面への正射影がみたす方程式を求めよ。

問題4 . (1) $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $F(x, y, z) = (x^3 - zx + y^2, z)$ で定義するとき、 F のヤコビ行列を求めよ。

(2) 上の F について、ヤコビ行列の階数 (rank) が1となる (x, y, z) はどのような曲線をなすか。また、この曲線を写像 F で写した像がみたす方程式を求めよ。

(この像に属さない点 (s, t) に対しては $F(x, y, z) = (s, t)$ を満たす (x, y, z) は滑らかな曲線となる。)