数理科学□演習問題　２００２年５月　　担当教官: 坪井　俊

http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/users/tsuboi/suurikagaku3table2002.html

問題１．２変数関数のグラフ $z=f(x,y)$ と接平面の関係について以下の問に答えよ。

$f(x,y)$ のグラフが (x_0,y_0) をとおる平面上の直線 $(x_0+t\cos\theta, y_0+t\sin\theta)$ 上でどのように変化するかをみるためには θ を直線の方向として、$g_\theta(t)=f(x_0+t\cos\theta, y_0+t\sin\theta)$ の t についての微分を計算すればよい。

(1)　$f(x,y)$ が 2 回連続微分可能として、$t=0$ における 2 階微分 $\dfrac{\mathrm{d}^2 g_\theta}{\mathrm{d}\,t^2}$ を計算せよ。

(2)　($\dfrac{\mathrm{d}^2 g_\theta}{\mathrm{d}\,t^2}$ が θ によらず常に正ならば、グラフ $z=f(x,y)$ の $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ における接平面は、接点の近傍で接点以外では $f(x,y)$ のグラフの下側にある。各点でこれが成り立つとき、グラフは下に凸であるという。)

(x_0,y_0) において、対称行列 $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ の行列式とトレースがともに正であるならば、$f(x,y)$ のグラフは $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ (の近傍) において下に凸であることを示せ。

(3)　対称行列 $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ の行列式が負ならば、グラフ $z=f(x,y)$ の $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ における接平面と、$f(x,y)$ のグラフは、接点以外で交わることを示せ。

上の問題から、平面上の 2 回連続微分可能な関数 $f(x,y)$ について、$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ の行列式とトレースを見て、極大極小の判定が出来ることがわかる。

問題２．$f(x,y)=\cos x\cdot\cos y$ について、$Df(x,y)=(0,0)$ となる点 (x,y) を求めよ。$f(x,y)$ はその点で極大であるか、極小であるか判定せよ。

問題３．$\mathbf{R}^3$ 内の曲面 $z=x^3+xy$ 上の点 (x_0,y_0,z_0) における接平面の方程式を求めよ。この接平面が x 軸に平行になるような点 (x_0,y_0,z_0) はどのような曲線をなすか。この曲線の yz 平面への正射影がみたす方程式を求めよ。

問題４．(1)　$F:\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R}^2$ を $F(x,y,z)=(x^3-zx+y^2,z)$ で定義するとき、F のヤコビ行列を求めよ。

(2)　上の F について、ヤコビ行列の階数 (rank) が 1 となる (x,y,z) はどのような曲線をなすか。また、この曲線を写像 F で写した像がみたす方程式を求めよ。
(この像に属さない点 (s,t) に対しては $F(x,y,z)=(s,t)$ を満たす点 (x,y,z) は滑らかな曲線となる。)