数理科学　演習問題　２００１年６月　　担当教官: 坪井　俊

http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/users/tsuboi/suurikagaku3table2002.html

問題１．　D を $(t^2, t^3 - t)$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ で囲まれる領域とする。D の面積を求めよ。

問題２．　γ を楕円 $(x_0 + a\cos t, y_0 + b\sin t)$ とする。γ が原点を通らないとき、
$\displaystyle\int_\gamma (x^2+y^2-1)\frac{x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{x^2+y^2}$ を求めよ。
ヒント：原点では微分１形式が定義されていないことに注意する。
$\displaystyle(x^2+y^2-1)\frac{x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{x^2+y^2} = (x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x) - \frac{x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{x^2+y^2}$ と分けて考える。

問題３．　平面から $(1,0)$, $(-1,0)$ の２点を除いたところで定義された次の微分１形式を考える。

$$\begin{aligned}\alpha =& \frac{(x-1)\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{(x-1)^2+y^2} - \frac{(x+1)\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{(x+1)^2+y^2}\\ =& \frac{-4xy\,\mathrm{d}\,x + 2(x^2-y^2-1)\,\mathrm{d}\,y}{(1+x^2+y^2)^2-4x^2}\end{aligned}$$

円周 $\gamma = \{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}$ に反時計回りの向き付けを考える。円周が $(1,0)$, $(-1,0)$ の２点は通過しないものとするとき、$\displaystyle\int_\gamma \alpha$ を求めよ。
ヒント：α の積分は $\dfrac{(x-1)\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{(x-1)^2+y^2}$ の積分と $\dfrac{(x+1)\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{(x+1)^2+y^2}$ の差である。また、線積分は円周を平行移動すれば微分形式 $\dfrac{x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{x^2+y^2}$ の線積分として計算される。

問題４．　３次元空間から xy 平面上の円周 $C = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1,\ z=0\}$ を除いたところで定義された微分１形式

$$\alpha = \frac{-2z\,\mathrm{d}(x^2+y^2) + 2(x^2+y^2-z^2-1)\,\mathrm{d}\,z}{(1+x^2+y^2+z^2)^2 - 4(x^2+y^2)}$$

を考える。
(1)　$\mathrm{d}\,\alpha = 0$ を示せ。
(2)　xz 平面上の円周 $\gamma = \{(x,y,z) \mid (x-x_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2, y=0\}$ に適当な向きを与えて $\displaystyle\int_\gamma \alpha$ を求めよ。ただし、円周は C と交わらないものとする。
ヒント：問題３を使う。

以下には、次回説明する内容もあります。

問題５．　$a,\ b,\ c$ を正実数とし、$f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ で与えられる曲面を S とする。S には領域 $K = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) \leqq 1\}$ の境界としての向きを定める。
積分 $\displaystyle\int_S x\,\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z + y\,\mathrm{d}\,z \wedge \mathrm{d}\,x + z\,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y$ を計算せよ。

問題６．　３次元ユークリッド空間内の原点以外のところで定義された次の微分２形式を考える。

$$\omega = \frac{1-r^3}{r^3}\big(x\,\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z + y\,\mathrm{d}\,z \wedge \mathrm{d}\,x + z\,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y\big),$$

ただし、$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする。S を (x_0, y_0, z_0) を中心とする半径 r_0 の球面とし、S には球体の境界としての向きを定める。積分 $\displaystyle\int_S \omega$ を計算せよ。

問題７．　空間上の微分２形式 $\omega = f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z + g(x,y,z)\,\mathrm{d}\,z \wedge \mathrm{d}\,x + h(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y$ が $\mathrm{d}\,\omega = 0$ を満たすとする。

$$\begin{aligned}\alpha = \ & \Big(\int_0^1 \big(zg(tx,ty,tz) - yh(tx,ty,tz)\big)t\,\mathrm{d}\,t\Big)\,\mathrm{d}\,x \\ & + \Big(\int_0^1 \big(xh(tx,ty,tz) - zf(tx,ty,tz)\big)t\,\mathrm{d}\,t\Big)\,\mathrm{d}\,y \\ & + \Big(\int_0^1 \big(yf(tx,ty,tz) - xg(tx,ty,tz)\big)t\,\mathrm{d}\,t\Big)\,\mathrm{d}\,z\end{aligned}$$

とおくと $\mathrm{d}\,\alpha = \omega$ となることを示せ。

問題８．　３次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 上の次の微分 2 形式について、それらがある微分 1 形式の外微分になっているかどうかを判定せよ。

(1)　$\alpha = x\ \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z + y\ \mathrm{d}\,z \wedge \mathrm{d}\,x + z\ \mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y$

(2)　$\beta = x\ \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z + z\ \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,x$