

## 常微分方程式の講義（担当：坪井 俊）の小テスト

注意。 筆記用具以外の持込は認めません。この小テストの成績は、期末試験の成績が悪い場合に考慮します。この小テストの出来が非常に悪いと思った人は7月6日までにレポートとして提出すれば、多少考慮します。

- 問題 1 . (1) 変数分離形常微分方程式  $\frac{dy}{dx} = (3x^2 - 1)(y - 1)y$  の一般解を求めよ。
- (2) 変数分離形常微分方程式  $\frac{dy}{dx} = (y - 2)y \cos x$  の  $y(0) = 1$  となる解を求めよ。
- (3) 微分形式  $y^2 dx + (3xy + 2)dy$  は 2 変数関数  $f(x, y)$  の全微分  $df$  となるかどうか判定せよ。
- (4) 上記 (3) の微分形式に  $\frac{1}{y^3}$  をかけて得られる微分形式  $\frac{1}{y} dx + \frac{3xy + 2}{y^3} dy$  は 2 変数関数  $f(x, y)$  の全微分  $df$  となるかどうか判定せよ。
- (5) 1 階線形常微分方程式  $\frac{dx}{dt} + 2tx = t$  の  $x(0) = 0$  となる解を求めよ。

- 問題 2 . (1) 行列の指数関数  $e^{tA}$  の定義を書き、行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  に対して、 $e^{tA}$  を計算せよ。

- (2)  $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$  に対して行列の指数関数  $e^{tA}$  を計算せよ。

- (3) 次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -5x_1 + 4x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_1 + x_2 \\ x_1(0) &= 2, x_2(0) = 1 \end{aligned}$$

- (4) 次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -4x_1 - 3x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 3x_1 - 4x_2 \\ x_1(0) &= 2, x_2(0) = 1 \end{aligned}$$

- 問題 3 .  $a_1, a_2$  を実数、 $b(t), c(t)$  を実数値関数とする。

2 階線形常微分方程式  $\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2x = b(t)$  の解  $u(t)$ ,

2 階線形常微分方程式  $\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2x = c(t)$  の解  $v(t)$  に対して、

$w(t) = u(t) + v(t)$  は 2 階線形常微分方程式  $\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2x = b(t) + c(t)$  の解であることを示せ。