常微分方程式（担当：坪井　俊）の小テスト（６月１５日）の解答例

問題１． (1) 変数分離形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (3x^2-1)(y-1)y$ の一般解を求めよ。

解答例 $\displaystyle\int \frac{1}{(y-1)y}\mathrm{d}y = \int (3x^2-1)\mathrm{d}x$ について、

左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{(y-1)y}\mathrm{d}y = \int (\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y})\mathrm{d}y$

$$= \log|y-1| - \log|y| = \log|\frac{y-1}{y}| + \text{定数}$$

右辺は $\displaystyle\int (3x^2-1)\mathrm{d}x = x^3 - x + \text{定数}$

従って $\displaystyle\log|\frac{y-1}{y}| = x^3 - x + C_1.$

$\displaystyle\frac{y-1}{y} = Ce^{x^3-x},\ y = \frac{1}{1-Ce^{x^3-x}}$

(2) 変数分離形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y-2)y\cos x$ の $y(0)=1$ となる解を求めよ。

解答例 $\displaystyle\int \frac{1}{(y-2)y}\mathrm{d}y = \int \cos x\mathrm{d}x$ について、

左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{(y-2)y}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{2}(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y})\mathrm{d}y$

$$= \frac{1}{2}(\log|y-2| - \log|y|) = \frac{1}{2}\log|\frac{y-2}{y}| + \text{定数}$$

右辺は $\displaystyle\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + \text{定数}$

従って $\displaystyle\log|\frac{y-2}{y}| = 2\sin x + C_1.$

$\displaystyle\frac{y-2}{y} = Ce^{2\sin x},\ y = \frac{2}{1-Ce^{2\sin x}}$

ここで、$y(0)=1$ だから $C=-1$ で、$\displaystyle y = \frac{2}{1+e^{2\sin x}}$

(3) 微分形式 $y^2\mathrm{d}x + (3xy+2)\mathrm{d}y$ は 2 変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となるかどうか判定せよ。

解答例 $\dfrac{\partial}{\partial y}y^2 = 2y,\ \dfrac{\partial}{\partial x}(3xy+2) = 3y$ は異なるので，2 変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ とならない。

(4) 上記 (3) の微分形式に $\dfrac{1}{y^3}$ をかけて得られる微分形式 $\dfrac{1}{y}\mathrm{d}x + \dfrac{3xy+2}{y^3}\mathrm{d}y$ は 2 変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となるかどうか判定せよ。

解答例 $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{y^2},\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{3xy+2}{y^3} = \dfrac{3}{y^2}$ は異なるので，2 変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ とならない。

(本当は全微分になるように問題を作るはずでした。)

(5) １階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2tx = t$ の $x(0) = 0$ となる解を求めよ。

解答例 同次方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2tx = 0$ の解は、

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\int 2t\mathrm{d}t$ から $\log|x| = -t^2 + C_1$, $x = Ce^{-t^2}$ である。

定数変化法で、$x(t) = C(t)e^{-t^2}$ とすると、

$\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}e^{-t^2} = t$ を得る。

従って、$\displaystyle C = \int \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int e^{t^2} t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{t^2} + C_2$

$x(t) = (\dfrac{1}{2}e^{t^2} + C_2)e^{-t^2} = \dfrac{1}{2} + C_2e^{-t^2}$ について、

$x(0) = 0$ だから $C_2 = -\dfrac{1}{2}$.

$x(t) = \dfrac{1}{2}(1 - e^{-t^2})$

（変数分離形として解くことも出来ました。）

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t(1 - 2x)$ だから

$\displaystyle\int \frac{1}{1-2x}\mathrm{d}x = \int t\mathrm{d}t$ から

$-\dfrac{1}{2}\log|1 - 2x| = \dfrac{1}{2}t^2 + C_1$

$1 - 2x = Ce^{-t^2}$,

$x(0) = 0$ だから $C = 1$ で、

$x = \dfrac{1}{2}(1 - e^{-t^2})$

問題２． (1) 行列の指数関数 e^{tA} の定義を書き、行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対して、e^{tA} を計算せよ。

解答例 $\displaystyle e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ で、$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は可換（$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$）だから $\exp(t\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}) = \exp(t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix})\exp(t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ ここで、$\exp(t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$,

$\exp(t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \exp(\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

従って、$\exp(t\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ に対して行列の指数関数 e^{tA} を計算せよ。

解答例 $tA = P(tB)P^{-1}$ のとき、$e^{tA} = Pe^{tB}P^{-1}$ となるから、

$e^{tA} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-3t} - e^{-t} & -2e^{-3t} + 2e^{-t} \\ e^{-3t} - e^{-t} & -e^{-3t} + 2e^{-t} \end{pmatrix}$

(3) 次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -5x_1 + 4x_2$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -2x_1 + x_2$$
$$x_1(0) = 2, x_2(0) = 1$$

解答例 $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、

$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が解。

(2) の計算から、$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$

(4) 次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -4x_1 - 3x_2$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 3x_1 - 4x_2$$
$$x_1(0) = 2, x_2(0) = 1$$

解答例 行列 $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ の固有値は $-4 \pm 3i$ であるが、これはそのような固有値をもつ行列のうち特別な形ものである。

この A に対して、$\exp(tA) = e^{-4t} \begin{pmatrix} \cos 3t & -\sin 3t \\ \sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix}$ となる。従って、

$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-4t} \begin{pmatrix} \cos 3t & -\sin 3t \\ \sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4t}(2\cos 3t - \sin 3t) \\ e^{-4t}(2\sin 3t + \cos 3t) \end{pmatrix}$

参考

この行列 $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ を複素数の範囲で対角化すると、

$\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 - 3i & 0 \\ 0 & -4 + 3i \end{pmatrix}$ となる。

従って、$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(-4-3i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-4+3i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1}$

$= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(-4-3i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-4+3i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -ie^{(-4-3i)t} & -e^{(-4-3i)t} \\ -ie^{(-4+3i)t} & e^{(-4+3i)t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} -ie^{(-4-3i)t} - ie^{(-4+3i)t} & -e^{(-4-3i)t} + e^{(-4+3i)t} \\ e^{(-4-3i)t} - e^{(-4+3i)t} & -ie^{(-4-3i)t} - ie^{(-4+3i)t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{e^{(-4-3i)t} + e^{(-4+3i)t}}{2} & \dfrac{e^{(-4-3i)t} - e^{(-4+3i)t}}{2i} \\ \dfrac{-e^{(-4-3i)t} + e^{(-4+3i)t}}{2i} & \dfrac{e^{(-4-3i)t} + e^{(-4+3i)t}}{2} \end{pmatrix} \\
&= e^{-4t}\begin{pmatrix} \cos 3t & -\sin 3t \\ \sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

問題３. a_1, a_2 を実数、$b(t)$, $c(t)$ を実数値関数とする。

２階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2x = b(t)$ の解 $u(t)$,

２階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2x = c(t)$ の解 $v(t)$ に対して、

$w(t) = u(t) + v(t)$ は２階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2x = b(t) + c(t)$ の解であることを示せ。

解答例 $\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2} + a_1\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + a_2w$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{d}^2(u+v)}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}(u+v)}{\mathrm{d}t} + a_2(u+v) \\
&= (\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}) + a_1(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}) + a_2(u+v) \\
&= (\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + +a_2u) + (\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + a_2v) = b(t) + c(t)
\end{aligned}
$$