変数係数線形常微分方程式

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ を考える。$\begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} = 0$ のとき同次形というが、このとき解の空間はん n 次元ベクトル空間である。すなわち $t = t_0$ における初期値 $\begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ によって解は定まり、$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = G(t)\begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ と書かれる。ただし $G(t_0) = I$ （単位行列）である。．ここで、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t) = A(t)G(t)$ となる。$G(t)$ の第 j 列は $\begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ を初期値とする解である。

$\det G(t)$ を知ることは、解についていくつかの予測をする上で重要である。すなわち、$\det G(t)$ は t_0 における体積 1 のものが t においてどうなっているかを示す。もしも、$t \to \infty$ のときにすべての解が 0 に収束するならば、$\det G(t) \to 0$ となるはずである。

このとき、

定理。 $\det G(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s}$ **が成立する。**

言葉を変えて言うと、$\det G(t)$ は、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det G(t) = \mathrm{tr}A(t)\det G(t), \det G(t_0) = 1$ を満たす。すなわち、$\det G(t)$ は、常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{tr}A(t)x, \det x(t_0) = 1$ の解である。

実際 $G(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$ であるとする ($g_i(t)$ は第 i 行) と、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t) = A(t)G(t)$ は $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_i(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t)g_j(t)$ ということである。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det G(t)\\
=\ &\det\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}t}(t)\\ g_2(t)\\ \vdots\\ g_n(t)\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}g_1(t)\\ \frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}t}(t)\\ \vdots\\ g_n(t)\end{pmatrix}+\cdots+\det\begin{pmatrix}g_1(t)\\ g_2(t)\\ \vdots\\ \frac{\mathrm{d}g_n}{\mathrm{d}t}(t)\end{pmatrix}\\
=\ &\det\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n a_{1j}(t)g_j(t)\\ g_2(t)\\ \vdots\\ g_n(t)\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}g_1(t)\\ \sum_{j=1}^n a_{2j}(t)g_j(t)\\ \vdots\\ g_n(t)\end{pmatrix}+\cdots+\det\begin{pmatrix}g_1(t)\\ g_2(t)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^n a_{nj}(t)g_j(t)\end{pmatrix}\\
=\ &\sum_{j=1}^n a_{1j}(t)\det\begin{pmatrix}g_j(t)\\ g_2(t)\\ \vdots\\ g_n(t)\end{pmatrix}+\sum_{j=1}^n a_{2j}(t)\det\begin{pmatrix}g_1(t)\\ g_j(t)\\ \vdots\\ g_n(t)\end{pmatrix}+\cdots+\sum_{j=1}^n a_{nj}(t)\det\begin{pmatrix}g_1(t)\\ g_2(t)\\ \vdots\\ g_j(t)\end{pmatrix}\\
=\ &\sum_{j=1}^n a_{jj}(t)\det\begin{pmatrix}g_1(t)\\ g_2(t)\\ \vdots\\ g_n(t)\end{pmatrix}=\mathrm{tr}A(t)\det G(t)
\end{aligned}
$$

注意。$A(t)=A$, $G(t)=e^{tA}$ のとき、$\det e^{tA}=e^{t\ \mathrm{tr}A}$ となる。これはジョルダン標準形からも容易に示される。

言葉。

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}=A(t)\vec{y}$ の解 $\vec{y}_1(t),\ \ldots,\ \vec{y}_n(t)$ が一次独立のとき、$\vec{y}_1(t),\ \ldots,\ \vec{y}_n(t)$ を一組の基本解あるいは解の基本系と呼ぶ。

基本解を並べた行列 $G(t)$ を基本解行列と呼ぶ。

２つの基本解行列 $G_1(t), G_2(t)$ に対し、$B=G_1(t_0)^{-1}G_2(t_0)$ とおくと、$G_2(t)=G_1(t)B$.

注意。基本解行列 $G(t)$ に対し、$\det G(t)$ は $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{tr}A(t)x$ を満たし、$e^{\int_{t_0}^t \mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s}$ 基本解行列のとり方にによらない。

随伴線形微分方程式. 基本解行列 $G(t)$ は $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t)=A(t)G(t)$ を満たす。ここで、逆行列を考える。$G(t)^{-1}=H(t)$ とすると $I=G(t)H(t)$ を微分して、$0=(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t))H(t)+G(t)(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t))=A(t)G(t)H(t)+G(t)(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t))=A(t)+G(t)(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t))$.
従って $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t)=-H(t)A(t)$. 転置行列をとれば $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{}^tH(t)=-{}^tA(t){}^tH(t)$.

すなわち、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{z}=-{}^tA(t)\vec{z}$ の基本解行列の１つは ${}^tG(t)^{-1}$ で与えられる。この微分方程式は随伴する線形微分方程式と呼ばれる。

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{z}(t)\bullet\vec{y}(t))=(-{}^tA(t)\vec{z}(t))\bullet\vec{y}(t)+\vec{z}(t)\bullet(A(t)\vec{y}(t))=0$ となる。従って、$\vec{z}(t)\bullet\vec{y}(t)$ の値は一定である。特に、$A(t)$ が交代行列 $({}^tA(t)=-A(t))$ であれば、$\|\vec{y}(t)\|$ は定数となる。

「随伴する」という考え方は、$L=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-A(t):\mathrm{Map}(\mathbf{R},\mathbf{R}^{\mathrm{n}})\longrightarrow\mathrm{Map}(\mathbf{R},\mathbf{R}^{\mathrm{n}})$ と内積 $\langle\vec{f},\vec{g}\rangle=\displaystyle\int_a^b\vec{f}(t)\bullet\vec{g}(t)\mathrm{d}t$ について $\langle L\vec{f},\vec{g}\rangle=\langle\vec{f},L^*\vec{g}\rangle$ すなわち、普通の行列だったら、（共役）転置行列となるものを考えるということである。随伴するものと等しければ、対称行列と同様の良い性質を持つことが期待でき、随伴するものと合わせて 0 になれば、反対称行列と同様の良い性質を持つことが期待できる。

$$
\begin{aligned}
&\langle L\vec{f},\vec{g}\rangle\\
=\;&\int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}\bullet\vec{g}-(A(t)\vec{f})\bullet\vec{g}\right)\mathrm{d}t\\
=\;&\left[\vec{f}\bullet\vec{g}\right]_a^b-\int_a^b\left(\vec{f}\bullet\frac{\mathrm{d}\vec{g}}{\mathrm{d}t}+\vec{f}\bullet({}^tA(t)\vec{g})\right)\mathrm{d}t\\
=\;&\langle\vec{f},L^*\vec{g}\rangle
\end{aligned}
$$

だから、a,b で $\vec{0}$ になる関数を扱っていれば、$L^*=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-{}^tA(t)$ となる。

ここで、a, b で $\vec{0}$ とならない場合についても $L^*=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-{}^tA(t)$ として書いた $\langle L\vec{f},\vec{g}\rangle-\langle\vec{f},L^*\vec{g}\rangle=\left[\vec{f}\bullet\vec{g}\right]_a^b$, すなわち

$$\vec{z}(b)\bullet\vec{y}(b)-\vec{z}(a)\bullet\vec{y}(a)=\int_a^b\{(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{z}(t)+{}^tA(t)\vec{z})\bullet\vec{y}(t)+\vec{z}(t)\bullet(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}(t)-A(t)\vec{y}(t))\}\mathrm{d}t$$

をグリーンの公式と呼ぶ。

非同次の場合。
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}=A(t)\vec{y}+\vec{b}(t)$ に対して、
定数変化法を試みることが出来る。基本解行列 $G(t)$ について、
$\vec{y}(t)=G(t)\vec{z}(t)$ とすると、
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(G(t)\vec{z}(t))=A(t)G(t)\vec{z}(t)+G(t)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{z}(t)=A(t)G(t)\vec{z}(t)+\vec{b}(t)$ を得る。
従って $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{z}(t)=G(t)^{-1}\vec{b}(t)$ となるように $\vec{z}(t)=\displaystyle\int_{t_0}^tG(s)^{-1}\vec{b}(s)\mathrm{d}s$ とすればよい。

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}=A(t)\vec{y}+\vec{b}_i(t)$ の解 $\vec{y}_i(t)$ が見つかっているとき、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}=A(t)\vec{y}+\displaystyle\sum_{i=1}^Nc_i\vec{b}_i(t)$ の解は $\displaystyle\sum_{i=1}^Nc_i\vec{y}_i(t)$ で与えられる。（重ね合わせの原理）

変数係数線形常微分方程式で最も面白いのものは $A(t)$ が周期的であるときである。$A(t+T)=A(t)$. このとき、$G(t+T)=G(t)B$ となる。$G(t+NT)=G(t)B^N$ だから、B を求めることが出来れば、解の様子はかなり良くわかる。B はフロケ Floquet の行列と呼ばれる。