

n変数1階線形同次微分方程式

2変数1階線形同次微分方程式  $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  に対しては、 $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$  を  $A$  に対してうまくとれば、 $P^{-1}AP$  が、 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  のように書かれる。そこで、 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  と座標変換すると、 $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$  は、 $\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} e^{\mu t} \cos \nu t & -e^{\mu t} \sin \nu t \\ e^{\mu t} \sin \nu t & e^{\mu t} \cos \nu t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t} t \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$  のように計算される。さらに、 $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$  は、 $P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$ ,  $P \begin{pmatrix} e^{\mu t} \cos \nu t & -e^{\mu t} \sin \nu t \\ e^{\mu t} \sin \nu t & e^{\mu t} \cos \nu t \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$ ,  $P \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t} t \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$  のように計算される。

このことから、2変数1階線形同次微分方程式の解の性質として、次のことがわかる。

- 解の定数倍、2つの解の和は解である。(解全体はベクトル空間になる。)
- 解は、初期値  $\vec{x}^0$  により一意的に定まり、初期値ついて線形である。(解の空間の次元は2である。)
- 解に現れる関数は、 $A$  の固有方程式の固有値によりわかる。

このうちの最初の2つの性質は、方程式を解かなくてもわかることである。さて、 $n$ 変数の場合に同様の問題を考えるために、次のように計算してみる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda_1 t)^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda_2 t)^n \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{n!} (\lambda_1 t)^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n!} (\lambda_2 t)^n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n \end{aligned}$$

この最後の行列に、 $\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$  を代入すると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left( \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^p \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}^q = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^p \frac{t^q}{q!} \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}^q \\ &= \left( \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^p \right) \left( \sum_{q=0}^{\infty} \frac{t^q}{q!} \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}^q \right) \end{aligned}$$

ここで、

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \mu^p & 0 \\ 0 & \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \mu^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}^{2q} = \begin{pmatrix} (-1)^q \nu^{2q} & 0 \\ 0 & (-1)^q \nu^{2q} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}^{2q+1} = \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^q \nu^{2q+1} \\ (-1)^q \nu^{2q+1} & 0 \end{pmatrix}$$

だから、

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{t^q}{q!} \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}^q = \begin{pmatrix} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(2q)!} (t\nu)^{2q} & -\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(2q+1)!} (t\nu)^{2q+1} \\ \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(2q+1)!} (t\nu)^{2q+1} & \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(2q)!} (t\nu)^{2q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \nu t & -\sin \nu t \\ \sin \nu t & \cos \nu t \end{pmatrix}$$

従って、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \nu t & -\sin \nu t \\ \sin \nu t & \cos \nu t \end{pmatrix}$$

となる。また、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left( \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^p \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^q = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^p \frac{t^q}{q!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^q$$

$$= \left( \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^p \right) \left( \sum_{q=0}^{\infty} \frac{t^q}{q!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^q \right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

### 行列の指数関数

そこで、一般の  $n \times n$  行列  $A$  に対し、

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

と定義する。

これは、行列  $A$  に対して、 $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$  と定義したものに、 $tA$  を代入したものである。

でも、

まず、級数の収束を示す。

$A = (a_{ij})$  とし、 $\max\{|a_{ij}|\} \leq M$  とする。 $A^k$  の成分  $a_{ij}^{(k)}$  について、 $\max\{|a_{ij}^{(k)}|\} \leq n^{k-1} M^k$  であることが数学的帰納法で示される。実際、 $A^k$  の成分についての不等式

を仮定すると、

$$|a_{ij}^{(k+1)}| = \left| \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell}^{(k+1)} a_{\ell j} \right| \leq n \cdot n^{k-1} M^k M = n^k M^{k+1}$$

を得る。

$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$  の  $ij$  成分は  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)}$  であるが、 $|\frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)}| \leq \frac{1}{k!} n^{k-1} M^k$  だから、 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)}$  は  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n^{k-1} M^k$  を優級数に持つ。 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n^{k-1} M^k = \frac{1}{n} e^{nM}$  で優級数が収束するから、 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$  は収束する。

この収束は、 $A$  の成分が有界である範囲 ( $\max_{ij} \{|a_{ij}|\} \leq M$  となる行列全体) で一様である。従って、 $e^A$  は  $A$  の成分について連続な関数となる。

行列の指数関数の性質

$e^A$  は次の性質を持つ。

- $AB = BA$  ならば  $e^{A+B} = e^A e^B$ .
- $e^{PAP^{-1}} = P e^A P^{-1}$
- $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A$

実際、次のように計算される。

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{p+q=k} \frac{k!}{p!q!} A^p B^q \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{p!} A^p \frac{1}{q!} B^q = \left( \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} A^p \right) \left( \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} B^q \right) = e^A e^B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{PAP^{-1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (PAP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (PA^k P^{-1}) \\ &= P \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) P^{-1} = P e^A P^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} &= \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k \\ &= A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = A e^{tA} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right) A = e^{tA} A \end{aligned}$$

同次方程式の形式的解法

行列の指数関数を使うと、線形同次微分方程式は形式的にはすぐに解かれる。

$\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x}$  に対し、 $t = 0$  で初期値  $\vec{x}^0$  をとる解は、 $\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}^0$  で与えられる。  
 実際、

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \frac{d}{dt}e^{tA}\vec{x}^0 = Ae^{tA}\vec{x}^0 = A\vec{x}(t)$$

2行2列の  $A$  に対して、この  $e^{tA}$  の具体的な形を、 $P^{-1}AP$  の形を標準形にして  $e^{tA} = Pe^{tP^{-1}AP}P^{-1}$  により求めた。

### ジョルダン標準形

$n \times n$  行列の固有多項式は  $n$  次多項式である。これは実数係数の  $n$  多項式であるから、ガウスの代数学の基本定理により、1次式の積に因数分解される。複素数解は、共役なものと同じ次数で現れる。

ジョルダンブロックとは次の形の行列である。

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

この  $k \times k$  行列の固有多項式は  $(\lambda - a)^k$  である。ジョルダンの定理とは  $n \times n$  実行列  $A$  に対して、 $n \times n$  複素行列  $P$  をとって、 $P^{-1}AP$  がジョルダンブロックの直和 (ジョルダン標準形) となるようにできる。共役複素数を固有値とするジョルダンブロックの数は、大きさを含め等しい。

この結果、 $2 \times 2$  実行列の場合は、 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \mu + \nu i & 0 \\ 0 & \mu - \nu i \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  の3通りのジョルダン標準形があることになる。なお、

$$\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu + \nu i & 0 \\ 0 & \mu - \nu i \end{pmatrix}$$

である。

$3 \times 3$  実行列の場合は  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu + \nu i & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \nu i \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$  の4通りである。

$4 \times 4$  実行列の場合は  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + \nu i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \nu i \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \mu_1 + \nu_1 i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 - \nu_1 i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 + \nu_2 i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 - \nu_2 i \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + \nu i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \nu i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mu + \nu i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu + \nu i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \nu i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \nu i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ の } 9 \text{ 通りである。}$$

ジョルダンブロックについての指数関数は

$$\exp\left(t \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{at} & te^{at} & \frac{t^2}{2!}e^{at} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{at} \\ 0 & e^{at} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!}e^{at} \\ \vdots & \ddots & \ddots & e^{at} & te^{at} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e^{at} \end{pmatrix}$$

となる。なお、

$$\begin{aligned} \exp\left(t \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(\mu+\nu i)t} & 0 \\ 0 & e^{(\mu-\nu i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{(\mu+\nu i)t} + e^{(\mu-\nu i)t}}{2} & -\frac{e^{(\mu+\nu i)t} - e^{(\mu-\nu i)t}}{2} \\ \frac{e^{(\mu+\nu i)t} - e^{(\mu-\nu i)t}}{2} & \frac{e^{(\mu+\nu i)t} + e^{(\mu-\nu i)t}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\mu t} \cos \nu t & -e^{\mu t} \sin \nu t \\ e^{\mu t} \sin \nu t & e^{\mu t} \cos \nu t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この結果、 $A$  の固有値が実数  $\lambda$ , 複素数  $\mu + \nu i$  を持つとき、 $e^{tA}$  は、 $e^{\lambda t}$ ,  $te^{\lambda t}$ ,  $\dots$ ,  $t^{k-1}e^{\lambda t}$ ,  $e^{\mu t} \cos \nu t$ ,  $e^{\mu t} \sin \nu t$ ,  $te^{\mu t} \cos \nu t$ ,  $te^{\mu t} \sin \nu t$ ,  $\dots$ ,  $t^{k-1}e^{\mu t} \cos \nu t$ ,  $t^{k-1}e^{\mu t} \sin \nu t$  の線形結合で書かれる。ただし  $k$  は、固有値  $\lambda$ ,  $\mu + \nu i$  のジョルダンブロックの最大の大きさである。

非同次線形微分方程式、定数変化法

非同次線形微分方程式  $\frac{d}{dt} \vec{x} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$  について、解の存在、一意性はわかっている。

2つの非同次方程式の解  $\vec{x}_1(t)$ ,  $\vec{x}_2(t)$  に対して、 $\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)$  は同次方程式の解である。従って、 $t=0$  で  $\vec{x}^0$  となる  $\frac{d}{dt} \vec{x} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$  の解は  $t=0$  で  $\vec{0}$  をとる解と  $e^{tA} \vec{x}^0$  の和である。

$\frac{d}{dt} \vec{x} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$  の解を探す。  $e^{tA} \vec{x}^0$  が同次方程式の解とする。そこで、 $\vec{x}(t) = e^{tA} \vec{X}(t)$  の形の解を探す。

$$Ae^{tA} \vec{X}(t) + e^{tA} \frac{d\vec{X}}{dt} = Ae^{tA} \vec{X}(t) + \vec{b}(t)$$

だから、

$$e^{tA} \frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{b}(t)$$

従って、 $X(t) = \int_0^t e^{-tA} \vec{b}(t) dt$  とし、 $\vec{x}(t) = e^{tA} \vec{X}(t) + e^{tA} \vec{x}^0$  が解である。

$\vec{x} = P\vec{y}$  と座標変換して、 $P^{-1}AP$  が標準形とする。微分方程式は、 $P \frac{d}{dt} \vec{y} = AP\vec{y} + \vec{b}(t)$  すなわち、 $\frac{d}{dt} \vec{y} = P^{-1}AP\vec{y} + P^{-1}\vec{b}(t)$  となる。 $\vec{y}(t) = e^{tP^{-1}AP} \vec{Y}(t)$  の形で解を探す。

$$P^{-1}AP e^{tP^{-1}AP} \vec{Y}(t) + e^{tP^{-1}AP} \frac{d\vec{Y}}{dt} = P^{-1}AP e^{tP^{-1}AP} \vec{Y}(t) + P^{-1}\vec{b}(t)$$

だから、

$$e^{tP^{-1}AP} \frac{d\vec{Y}}{dt} = P^{-1}\vec{b}(t)$$

従って、

$$\begin{aligned} \vec{Y}(t) &= \int_0^t e^{-tP^{-1}AP} P^{-1}\vec{b}(t) dt \\ \vec{y}(t) &= e^{tP^{-1}AP} \int_0^t e^{-tP^{-1}AP} P^{-1}\vec{b}(t) dt \\ \vec{x}(t) &= P e^{tP^{-1}AP} \int_0^t e^{-tP^{-1}AP} P^{-1}\vec{b}(t) dt \end{aligned}$$

である。

例 .  $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$

$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$  の固有多項式は

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + 5 & 4 \\ -10 & \lambda - 7 \end{pmatrix} = (\lambda + 5)(\lambda - 7) + 4 \cdot 10 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = (\lambda - 1 - 2i)(\lambda - 1 + 2i)$$

ここでは複素数の範囲で対角化しよう。固有値  $1 + 2i$ ,  $1 - 2i$  に対する固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 + i \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 - i \end{pmatrix}$  であり、

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 + i & 3 - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 + i & 3 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + 2i & 0 \\ 0 & 1 - 2i \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 + i & 3 - i \end{pmatrix} \text{ とすると、 } P^{-1} = \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} 3 - i & 2 \\ -3 - i & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 - 3i & -2i \\ -1 + 3i & 2i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ とすると、}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 + 2i & 0 \\ 0 & 1 - 2i \end{pmatrix} \vec{y} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 - 3i & -2i \\ -1 + 3i & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

となる。次のように計算しておく方が都合が良い。

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 - 3i & -2i \\ -1 + 3i & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 - 3i & -2i \\ -1 + 3i & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \\ \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (-1 - 3i) \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} - e^{it} + e^{-it} \\ (-1 + 3i) \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} + e^{it} - e^{-it} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (-3 - 3i)e^{it} + (1 - 3i)e^{-it} \\ (1 + 3i)e^{it} + (-3 + 3i)e^{-it} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$t = 0$  で  $\vec{y} = \vec{0}$  となる解を、 $\vec{y}(t) = \exp(t \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix}$  の形で求めると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix} &= \int_0^t \exp(-t \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}) \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (-3-3i)e^{it} + (1-3i)e^{-it} \\ (1+3i)e^{it} + (-3+3i)e^{-it} \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{8} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{(-1-2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1+2i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3-3i)e^{it} + (1-3i)e^{-it} \\ (1+3i)e^{it} + (-3+3i)e^{-it} \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{8} \int_0^t \begin{pmatrix} (-3-3i)e^{(-1-i)t} + (1-3i)e^{(-1-3i)t} \\ (1+3i)e^{(-1+3i)t} + (-3+3i)e^{(-1+i)t} \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \left[ 3e^{(-1-i)t} + \frac{1-3i}{-1-3i} e^{(-1-3i)t} \right]_0^t \\ \left[ \frac{1+3i}{-1+3i} e^{(-1+3i)t} + 3e^{(-1+i)t} \right]_0^t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 15e^{(-1-i)t} + (4+3i)e^{(-1-3i)t} - (19+3i) \\ (4-3i)e^{(-1+3i)t} + 15e^{(-1+i)t} - (19-3i) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{40} \begin{pmatrix} e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15e^{(-1-i)t} + (4+3i)e^{(-1-3i)t} - (19+3i) \\ (4-3i)e^{(-1+3i)t} + 15e^{(-1+i)t} - (19-3i) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 15e^{it} + (4+3i)e^{-it} - (19+3i)e^{(1+2i)t} \\ (4-3i)e^{it} + 15e^{-it} - (19-3i)e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

従って、 $\vec{y}^0 = P^{-1}\vec{x}^0$  を初期値とする解は、 $\begin{pmatrix} e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} P^{-1}\vec{x}^0 + \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$  となる。 $\vec{x}^0$  を初期値とする解は、

$$P \begin{pmatrix} e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} P^{-1}\vec{x}^0 + P \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &P \begin{pmatrix} e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} P^{-1}\vec{x}^0 \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3+i & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-3i & -2i \\ -1+3i & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2e^{(1+2i)t} & -2e^{(1-2i)t} \\ (3+i)e^{(1+2i)t} & (3-i)e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-3i & -2i \\ -1+3i & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (2+6i)e^{(1+2i)t} + (2-6i)e^{(1-2i)t} & 4ie^{(1+2i)t} - 4ie^{(1-2i)t} \\ -10ie^{(1+2i)t} + 10ie^{(1-2i)t} & (2-6i)e^{(1+2i)t} + (2+6i)ie^{(1-2i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{(1+2i)t} + e^{(1-2i)t}}{2} - 3\frac{e^{(1+2i)t} - e^{(1-2i)t}}{2} & -2\frac{e^{(1+2i)t} - e^{(1-2i)t}}{2} \\ \frac{5e^{(1+2i)t} - e^{(1-2i)t}}{2} & \frac{e^{(1+2i)t} + e^{(1-2i)t}}{2} + 3\frac{e^{(1+2i)t} - e^{(1-2i)t}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t \cos 2t - 3e^t \sin 2t & -2e^t \sin 2t \\ 5e^t \sin 2t & e^t \cos 2t + 3e^t \sin 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{40} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3+i & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15e^{it} + (4+3i)e^{-it} - (19+3i)e^{(1+2i)t} \\ (4-3i)e^{it} + 15e^{-it} - (19-3i)e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{40} \begin{pmatrix} (-38-6i)e^{-it} + (-38+6i)e^{it} + ((38+6i)e^{(1+2i)t} + (38-6i)e^{(1-2i)t}) \\ (54+2i)e^{it} + (54-2i)e^{-it} - ((54+28i)e^{(1+2i)t} + (54-28i)e^{(1-2i)t}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{19}{27} \frac{e^{it} + e^{-it}}{e^{it} + e^{-it}} - \frac{3}{1} \frac{e^{it} - e^{-it}}{e^{it} - e^{-it}} + \frac{19}{27} \frac{e^{(1+2i)t} + e^{(1-2i)t}}{e^{(1+2i)t} + e^{(1-2i)t}} - \frac{3}{7} \frac{e^{(1+2i)t} - e^{(1-2i)t}}{e^{(1+2i)t} - e^{(1-2i)t}} \\ \frac{10}{19} \frac{2}{27} \frac{e^{it} + e^{-it}}{e^{it} + e^{-it}} - \frac{10}{1} \frac{2i}{e^{it} - e^{-it}} - \frac{10}{27} \frac{2}{e^{(1+2i)t} + e^{(1-2i)t}} + \frac{10}{7} \frac{2i}{e^{(1+2i)t} - e^{(1-2i)t}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{10}{19} \cos t - \frac{3}{10} \sin t + \frac{19}{27} e^t \cos 2t - \frac{3}{7} e^t \sin 2t \\ \frac{10}{27} \cos t - \frac{10}{1} \sin t - \frac{10}{27} e^t \cos 2t + \frac{10}{7} e^t \sin 2t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$