高階線形常微分方程式

$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + + a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = b(t)$ の形の常微分方程式を考える。このように最高階の微分について解かれているものを正規形と呼んだ。$b(t) = 0$ のとき、同次方程式であるという。2階ならば、$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = b(t)$ である。

$y_1 = x,\, y_2 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \ldots, y_n = \frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}$ と置いて、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

2階ならば、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$ である。

ある時刻 t の状態を指定するためには $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$ を定めなければならない。この $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$ の空間を相空間、状態空間などと呼ぶ。(他のわかっている条件により、さらに制限が加わっていることもある。)

初期値問題を解くためには、$\begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t_0) \\ y_n(t_0) \end{pmatrix}$ すなわち、$\begin{pmatrix} x(0) \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}(0) \end{pmatrix}$ を指定する必要がある。

このような線形常微分方程式を解くためには、まず同次方程式を解くのであった。

高階線形同次常微分方程式

高階線形同次常微分方程式を1階化したものを解くためには、行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ の固有値、ジョルダン標準形を知る必要があった。

2 階ならば、$\det\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ a_0 & \lambda+a_1\end{pmatrix} = \lambda^2+a_1\lambda+a_0$ である。一般に次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix}
\lambda & -1 & 0 & \dots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \dots & 0 & \lambda & -1\\
a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & \lambda+a_{n-1}
\end{pmatrix}\\
=\ & \lambda\begin{vmatrix}
\lambda & -1 & 0 & \dots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \dots & 0 & \lambda & -1\\
a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & \lambda+a_{n-1}
\end{vmatrix} + (-1)^{n+1}a_0\begin{vmatrix}
-1 & 0 & \dots & \dots & 0\\
\lambda & -1 & \ddots & & \vdots\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \dots & 0 & \lambda & -1
\end{vmatrix}\\
=\ & a_0+\lambda(a_1+\lambda(\cdots(a_n+2+\lambda(\lambda+a_{n-1}))\cdots))\\
=\ & \lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0
\end{aligned}
$$

従って、固有方程式は、与えられた高階微分方程式の $\dfrac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k}$ を λ^k で置き換えたものである。

さらに、ジョルダン標準形については次のことがわかる。固有方程式が、$(\lambda-\alpha)^k$ で割り切れ、$(\lambda-\alpha)^{k+1}$ で割り切れないときにはジョルダン標準形は、k 次の固有値 α のジョルダンブロックを含む。

理由は、固有値 α の固有ベクトルの空間の次元が 1 であることである。実際、固有値 α の固有ベクトルの空間は、$\begin{pmatrix}
\alpha & -1 & 0 & \dots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \dots & 0 & \alpha & -1\\
a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & \alpha+a_{n-1}
\end{pmatrix}\vec{v}=0$ を満たす $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_{n-1}\\ v_n\end{pmatrix}$ の集合であるが、$v_2=\alpha v_1,\ v_3=\alpha v_2,\ v_n=\alpha v_{n-1}$ を満たすから、この空間の次元は 1 である。もしも、固有値 α に対するジョルダンブロックの個数が 2 個以上ならば、それぞれに対して、固有ベクトルの空間が 1 次元ずつあるから、固有ベクトルの空間は 2 次元以上となる。

こうして、$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=(\lambda-\alpha_1)^{k_1}\dots(\lambda-\alpha_\ell)^{k_\ell}$ を $\alpha_1,\dots,\alpha_\ell$ が相異なる因数分解とすると、同次方程式の解 $\vec{y}(t)$ の成分は次の関数の線形結合（1 次結合）で書かれる。

$$
\begin{gathered}
e^{\alpha_1 t},\ te^{\alpha_1 t},\ \dots, t^{k_1-1}e^{\alpha_1 t},\\
\dots\\
e^{\alpha_\ell t},\ te^{\alpha_1 t},\ \dots, t^{k_\ell-1}e^{\alpha_\ell t}
\end{gathered}
$$

高階線形同次常微分方程式の解については、$x(t)=y_1(t)$ だから、$x(t)$ も上の関数の一次結合で書かれる。

すなわち、

定理。 $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=(\lambda-\alpha_1)^{k_1}\ldots(\lambda-\alpha_\ell)^{k_\ell}$ を $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_\ell$ が相異なる因数分解とすると、同次線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+$ $+a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=0$ の一般解は、次の関数の線形結合（１次結合）である。

$$e^{\alpha_1 t},\ te^{\alpha_1 t},\ \ldots,t^{k_1-1}e^{\alpha_1 t},\quad \ldots,\quad e^{\alpha_\ell t},\ te^{\alpha_1 t},\ \ldots,t^{k_\ell-1}e^{\alpha_\ell t}$$

この事実を次のように言い表す。

同次線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots++a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=0$ の解は、

$$e^{\alpha_1 t},\ te^{\alpha_1 t},\ \ldots,t^{k_1-1}e^{\alpha_1 t},\quad \ldots,\quad e^{\alpha_\ell t},\ te^{\alpha_1 t},\ \ldots,t^{k_\ell-1}e^{\alpha_\ell t}$$

を基底とする n 次元ベクトル空間をなす。

多項式 $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$, n 次方程式 $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$ を $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots++a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=0$ の特性多項式、特性方程式と呼ぶ。

２階同次線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=0$ の一般解は以下のようになる。

- $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)$ ($\alpha_1,\ \alpha_2$ は実数で $\alpha_1\neq\alpha_2$) のとき、$C_1e^{\alpha_1 t}+C_2e^{\alpha_2 t}$
- $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=(\lambda-\mu-\nu i)(\lambda-\mu+\nu i)$ ($\mu,\ \nu\neq 0$ は実数) のとき、$C_1e^{\mu t}\cos\nu t+C_2e^{\mu t}\sin\nu t$
- $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=(\lambda-\alpha)^2$ のとき、$C_1e^{\alpha t}+C_2te^{\alpha t}$

例。

（１） $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-3x=0$ の特性多項式は $\lambda^2+2\lambda-3=(\lambda+3)(\lambda-1)$ だから一般解は、$C_1e^{-3t}+C_2e^{t}$ である。

初期値 $x(0)=3,\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-1$ となる解は、$\begin{cases} C_1+C_2=3 \\ -3C_1+C_2=-1 \end{cases}$ を解いて、$C_1=1$, $C_2=1$ だから、$x(t)=e^{-3t}+e^{t}$ である。

（２） $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2x=0$ の特性多項式は $\lambda^2+2\lambda+2=(\lambda+1+i)(\lambda+1-i)$ だから一般解は、$C_1e^{-t}\cos t+C_2e^{-t}\sin t$ である。

初期値 $x(0)=3,\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-1$ となる解は、$\begin{cases} C_1=3 \\ -C_1+C_2=-1 \end{cases}$ を解いて、$C_1=3$, $C_2=2$ だから、$x(t)=3e^{-t}\cos t+2e^{-t}\sin t=e^{-t}(3\cos t+2\sin t)$ である。

（３） $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0$ の特性多項式は $\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2$ だから一般解は、$C_1e^{-t}+C_2te^{-t}$ である。

初期値 $x(0)=3,\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-1$ となる解は、$\begin{cases} C_1=3 \\ -C_1+C_2=-1 \end{cases}$ を解いて、$C_1=3$, $C_2=2$ だから、$x(t)=3e^{-t}+2te^{-t}$ である。

非同次方程式

非同次方程式の解に、同次方程式の解を加えたものは再び非同次方程式の解である。

非同次方程式の一般解を求めるためには、その解を１つ求めればよい。

線形非同次方程式の一般論に従って求めてみると以下のようになる。

$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=b(t)$ の解は、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-a_0&-a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b(t)\end{pmatrix}$ の解を求めることで得られる。

$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)$, $(\alpha_1\neq\alpha_2)$ のとき、

$$\begin{pmatrix}0&1\\-a_0&-a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\\alpha_1&\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\\alpha_1&\alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1&0\\0&\alpha_2\end{pmatrix}$$

だから、

$$\exp(t\begin{pmatrix}0&1\\-a_0&-a_1\end{pmatrix})=\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\begin{pmatrix}1&1\\\alpha_1&\alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{t\alpha_1}&0\\0&e^{t\alpha_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2&-1\\-\alpha_1&1\end{pmatrix}$$

非同次方程式の解を、$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\exp(t\begin{pmatrix}0&1\\-a_0&-a_1\end{pmatrix})\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}$ の形で求めるためには、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}=\exp(-t\begin{pmatrix}0&1\\-a_0&-a_1\end{pmatrix})\begin{pmatrix}0\\b(t)\end{pmatrix}$ を積分すれば良く、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}Y_1(t)\\Y_2(t)\end{pmatrix}&=\int_0^t\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\begin{pmatrix}1&1\\\alpha_1&\alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-t\alpha_1}&0\\0&e^{-t\alpha_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2&-1\\-\alpha_1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\b(t)\end{pmatrix}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\begin{pmatrix}1&1\\\alpha_1&\alpha_2\end{pmatrix}\int_0^t\begin{pmatrix}-b(t)e^{-t\alpha_1}\\b(t)e^{-t\alpha_2}\end{pmatrix}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}&=\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\begin{pmatrix}1&1\\\alpha_1&\alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{t\alpha_1}&0\\0&e^{t\alpha_2}\end{pmatrix}\int_0^t\begin{pmatrix}-b(t)e^{-t\alpha_1}\\b(t)e^{-t\alpha_2}\end{pmatrix}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\begin{pmatrix}e^{t\alpha_1}&e^{t\alpha_2}\\\alpha_1e^{t\alpha_1}&\alpha_2e^{t\alpha_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\displaystyle\int_0^t b(t)e^{-t\alpha_1}\mathrm{d}t\\\displaystyle\int_0^t b(t)e^{-t\alpha_2}\mathrm{d}t\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\begin{pmatrix}-e^{t\alpha_1}\displaystyle\int_0^t b(t)e^{-t\alpha_1}\mathrm{d}t+e^{t\alpha_2}\int_0^t b(t)e^{-t\alpha_2}\mathrm{d}t\\-\alpha_1e^{t\alpha_1}\displaystyle\int_0^t b(t)e^{-t\alpha_1}\mathrm{d}t+\alpha_2e^{t\alpha_2}\int_0^t b(t)e^{-t\alpha_2}\mathrm{d}t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

この計算から、２階非同次方程式の $x(0)=0,\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=0$ を満たす解は、

$$x(t)=-\frac{e^{t\alpha_1}}{\alpha_2-\alpha_1}\int_0^t b(t)e^{-t\alpha_1}\mathrm{d}t+\frac{e^{t\alpha_2}}{\alpha_2-\alpha_1}\int_0^t b(t)e^{-t\alpha_2}\mathrm{d}t$$

となる。

この計算は、積分によって、非同次方程式の解の１つを計算できることを示すために書いたもので、公式を与えようとしたものではない。

定数変化法だから、$x(t)=C_1(t)e^{\alpha_1 t}$ の形で求めることにして計算をしても２階位なら解は得られる。

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+a_0x(t)\\
=\ &\frac{\mathrm{d}^2C_1}{\mathrm{d}t^2}e^{\alpha_1 t}+2\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t}\alpha_1e^{\alpha_1 t}+C_1\alpha_1^2e^{\alpha_1 t}+a_1\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t}e^{\alpha_1 t}+a_1C_1\alpha_1e^{\alpha_1 t}+a_0C_1e^{\alpha_1 t}\\
=\ &\frac{\mathrm{d}^2C_1}{\mathrm{d}t^2}e^{\alpha_1 t}+2\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t}\alpha_1e^{\alpha_1 t}+a_1\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t}e^{\alpha_1 t}=b(t)
\end{aligned}$$

だから、$E_1=\dfrac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t}$ について、１階線形微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}t}+(2\alpha_1+a_1)E_1=b(t)e^{-\alpha_1 t}$$

を再び解くことになる。$E_1(t)=F_1(t)e^{-(2\alpha_1+a_1)t}$ の形で求めると、

$$\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}t}=b(t)e^{-\alpha_1 t}e^{(2\alpha_1+a_1)t}=b(t)e^{(\alpha_1+a_1)t}$$

従って、

$$\begin{aligned}
&F_1(t)=\int_0^t b(t)e^{(\alpha_1+a_1)t}\mathrm{d}t,\\
&E_1(t)=e^{-(2\alpha_1+a_1)t}\int_0^t b(t)e^{(\alpha_1+a_1)t}\mathrm{d}t,\\
&C_1(t)=\int_0^t e^{-(2\alpha_1+a_1)t}\int_0^t b(s)e^{(\alpha_1+a_1)s}\mathrm{d}s\mathrm{d}t,\\
&x(t)=e^{\alpha_1 t}\int_0^t e^{-(2\alpha_1+a_1)t}\int_0^t b(s)e^{(\alpha_1+a_1)s}\mathrm{d}s\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$a_1=-\alpha_1-\alpha_2$ であり、部分積分すると、前の解と一致することも確かめられる。

$$\begin{aligned}
x(t)=\ &e^{\alpha_1 t}\int_0^t e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}\int_0^t b(s)e^{-\alpha_2 s}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\
=\ &e^{\alpha_1 t}\left[\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}\int_0^t b(s)e^{-\alpha_2 s}\mathrm{d}s\right]_0^t\\
&-e^{\alpha_1 t}\int_0^t\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}b(t)e^{-\alpha_2 t}\mathrm{d}t\\
=\ &-\frac{e^{t\alpha_1}}{\alpha_2-\alpha_1}\int_0^t b(t)e^{-t\alpha_1}\mathrm{d}t+\frac{e^{t\alpha_2}}{\alpha_2-\alpha_1}\int_0^t b(t)e^{-t\alpha_2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=(\lambda-\alpha)^2$ のとき、

$$\begin{pmatrix}0&1\\-a_0&-a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\alpha&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-\alpha^2&2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\alpha&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\\alpha&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}$$

だから、

$$\exp(t\begin{pmatrix}0&1\\-a_0&-a_1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1&0\\\alpha&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{t\alpha}&te^{t\alpha}0\\0&e^{t\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-\alpha&1\end{pmatrix}$$

非同次方程式の解を、$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\exp(t\begin{pmatrix}0&1\\-a_0&-a_1\end{pmatrix})\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}$ の形で求めるためには、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}=\exp(-t\begin{pmatrix}0&1\\-a_0&-a_1\end{pmatrix})\begin{pmatrix}0\\b(t)\end{pmatrix}$ を積分すれば良く、

$$\begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t\alpha} & -te^{-t\alpha} \\ 0 & e^{-t\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} -b(t)te^{-t\alpha} \\ b(t)e^{-t\alpha} \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

従って、

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & te^{t\alpha} \\ 0 & e^{t\alpha} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} -b(t)te^{-t\alpha} \\ b(t)e^{-t\alpha} \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$
$$= \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & te^{t\alpha} \\ \alpha e^{t\alpha} & \alpha te^{t\alpha} + e^{t\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\int_0^t b(t)te^{-t\alpha}\mathrm{d}t \\ \int_0^t b(t)e^{-t\alpha}\mathrm{d}t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -e^{t\alpha}\int_0^t b(t)te^{-t\alpha}\mathrm{d}t + te^{t\alpha}\int_0^t b(t)e^{-t\alpha}\mathrm{d}t \\ -\alpha e^{t\alpha}\int_0^t b(t)te^{-t\alpha}\mathrm{d}t + (\alpha te^{t\alpha} + e^{t\alpha})\int_0^t b(t)e^{-t\alpha}\mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

この計算から、２階非同次方程式の $x(0) = 0, \ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ を満たす解は、

$$x(t) = -e^{t\alpha}\int_0^t b(t)te^{-t\alpha}\mathrm{d}t + te^{t\alpha}\int_0^t b(t)e^{-t\alpha}\mathrm{d}t$$

となる。

これらの計算からわかることは、$b(t)$ が指数関数や多項式の時には具体的な計算が比較的容易に出来るということである。

もう１つの問題は、非同次方程式の１つの解を求めることの意味である。現実の問題では、しばしば同次方程式の解自体の寄与が無視でき、同次方程式の解の影響が限定的に現れることが観察される。