

変数係数高階線形常微分方程式

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = b(t) \text{ は}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

と同値である。

同次方程式 $\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0$ の解の空間は、 n 次元ベクトル空間となる。

基底として n 個の関数 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ をとるとき、これを 1 組の基本解、解の基本系とよぶ。1 階化した方程式の基本解行列に当たるものは、次のものである。

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} & \cdots & \frac{dx_n}{dt} \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} & \frac{d^2 x_2}{dt^2} & \cdots & \frac{d^2 x_n}{dt^2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} & \frac{d^{n-1} x_2}{dt^{n-1}} & \cdots & \frac{d^{n-1} x_n}{dt^{n-1}} \end{pmatrix}$$

これは、ロンスキー行列 Wronskian matrix と呼ばれる。この行列の行列式をロンスキアン (ロンスキー行列式) と呼び、 $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と書く。

解 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ が解の基本系をなすことと、 $W(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ は同値である。

$W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) = W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds}$ だから、 $W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t_0) \neq 0$ ならば、常に $W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) \neq 0$ である。特に、 $a_1(t) = 0$ ならば、ロンスキー行列式は定数である。 $W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) = W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds}$ はリウビル Liouville の公式と呼ばれる。

非同次方程式に対し定数変化法で解をもとめるときにもロンスキー行列式が現れる。

$$\sum x_k(t) \xi_k(t) \text{ の形すなわち } \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} & \cdots & \frac{dx_n}{dt} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} & \frac{d^{n-1} x_2}{dt^{n-1}} & \cdots & \frac{d^{n-1} x_n}{dt^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \text{ の形で、解}$$

を求めると、

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} & \cdots & \frac{dx_n}{dt} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} & \frac{d^{n-1}x_2}{dt^{n-1}} & \cdots & \frac{d^{n-1}x_n}{dt^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\xi_1}{dt} \\ \frac{d\xi_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\xi_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix} \quad \text{だから、クラメルの公式}$$

$$\text{det} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & 0 & \cdots & x_n \\ \frac{dx_1}{dt} & \cdots & 0 & \cdots & \frac{dx_n}{dt} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{d^{n-2}x_1}{dt^{n-2}} & \cdots & 0 & \cdots & \frac{d^{n-2}x_n}{dt^{n-2}} \\ \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} & \cdots & b(t) & \cdots & \frac{d^{n-1}x_n}{dt^{n-1}} \end{pmatrix}$$

よって $\frac{d\xi_k}{dt} = \frac{\text{det} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} & \cdots & \frac{dx_n}{dt} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} & \frac{d^{n-1}x_2}{dt^{n-1}} & \cdots & \frac{d^{n-1}x_n}{dt^{n-1}} \end{pmatrix}}{\text{det} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} & \cdots & \frac{dx_n}{dt} \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} & \frac{d^2x_2}{dt^2} & \cdots & \frac{d^2x_n}{dt^2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} & \frac{d^{n-1}x_2}{dt^{n-1}} & \cdots & \frac{d^{n-1}x_n}{dt^{n-1}} \end{pmatrix}}$. この式の分母はロンス

キアン、分子はロンスキアンの余因子に $b(t)$ をかけたものである。

また、 n 個の解 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ に対し、 $W(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ とすると、これらは 1 次従属である。すなわち $\sum_{i=1}^n c_i x_i(t) = 0$ となるすべてが 0 ではない実数 c_i が存在する。

n 個の関数 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ に対し、 $W(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ となる時、 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ には関数関係があるという。

実際、例えば $W(x_1, x_2) = 0$ ならば $x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt} = 0$ あるいは、 $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1}$ という関係があり、この微分方程式を解けば、 x_2 は x_1 の関数として表される。

線形常微分方程式を作用素と見る場合、

$$Lx(t) = (a_0(t) \frac{d^n}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{d}{dt} + a_n(t))x(t)$$

と $\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt$ に対し、随伴する作用素 L^* ($\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^*y \rangle$) を考えることができる。

例えば、2 階の線形常微分方程式に対しては、

$$\langle Lx, y \rangle = \int_a^b \left\{ a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} y + a_1(t) \frac{dx}{dt} y + a_2(t) x(t) y(t) \right\} dt. \text{ 第1項は}$$

$$\begin{aligned} & \left[a_0 \frac{dx}{dt} y \right]_a^b - \int_a^b \frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} (a_0(t) y(t)) dt \\ &= \left[a_0 \frac{dx}{dt} y \right]_a^b - \left[x \frac{d}{dt} (a_0 y) \right]_a^b + \int_a^b x(t) \frac{d^2}{dt^2} (a_0(t) y(t)) dt, \end{aligned}$$

第2項は $\left[a_1 x y \right]_a^b - \int_a^b x \frac{d}{dt} (a_1(t) y(t)) dt$ だから、 a, b で値も微分も0になるような関数を考えれば、 $L^* y = \frac{d^2}{dt^2} (a_0(t) y(t)) - \frac{d}{dt} (a_1(t) y(t)) + a_2(t) y(t)$ となる。

2階の線形常微分方程式を、 $\frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{dx}{dt} \right) + q(t)x = 0$ の形に書き換えることがしばしば行われる [Y-E]。 (Sturm-Liouville).

$$Lx = \frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{dx}{dt} \right) + q(t)x \text{ に対し、}$$

$$\begin{aligned} & \langle Lx, y \rangle \\ &= \int_a^b \left(\frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{dx}{dt} \right) + q(t)x \right) y dt \\ &= \left[p(t) \frac{dx}{dt} y \right]_a^b - \int_a^b \left(p(t) \frac{dx}{dt} \right) \frac{d}{dt} y dt + \int_a^b q(t) x y dt \\ &= \left[p(t) \frac{dx}{dt} y \right]_a^b - \left[p(t) x \frac{dy}{dt} \right]_a^b + \int_a^b x \frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{d}{dt} y \right) dt + \int_a^b q(t) x y dt \end{aligned}$$

だから、 $\left[\dots \right]_a^b$ が0となるような x, y に対して $L^* y = Ly$ となる。自己随伴 self-adjoint と呼ばれる。

$$\begin{aligned} \left[p(t) \left(\frac{dx}{dt} y - x \frac{dy}{dt} \right) \right]_a^b &= \langle Lx, y \rangle - \langle x, Ly \rangle \\ &= \int_a^b \left(\frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{dx}{dt} \right) + q(t)x \right) y dt - \int_a^b \left(\frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{dy}{dt} \right) + q(t)y \right) x dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{dx}{dt} \right) y - \frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{dy}{dt} \right) x \right) dt \end{aligned}$$

となる。グリーンの公式と呼ばれる。