6. **5月24日**

２変数１階線形同次微分方程式

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ について、線形の微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = A\vec{x}$, すなわち

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ あるいは $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$ を考える。

微分方程式を簡単にするために平面上の線形な座標変換を考える。2 行 2 列の行列 $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ により、$\vec{x} = P\vec{y}$、つまり、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ で $\det P = p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12} \neq 0$ とする。P は一定の行列と考えているので、$\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = P\dfrac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}$. 従って、微分方程式は、$P\dfrac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = AP\vec{y}$ と変形される。P の逆行列 P^{-1} を用いて正規形に書き直せば、$\dfrac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = P^{-1}AP\vec{y}$ となる。

問題は、$P^{-1}AP$ を簡単にすることである。

この問題は、行列 A の固有値を考えることで、いくつかの場合に分かれる。

固有値とは、固有多項式

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21}$$

の解のことである。これは、実数係数の 2 次方程式であるから、固有値の可能性としては、異なる 2 つの実数、１つの実数、共役複素数の 3 通りがある。

（1）A の固有値が異なる２つの実数 λ_1, λ_2 の場合。

$\begin{pmatrix} \lambda_1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda_1 - a_{22} \end{pmatrix}$ の行列式は 0 だから、$\begin{pmatrix} \lambda_1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda_1 - a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる 0 ではないベクトル（固有ベクトル）$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ が存在する。関係式を書き換えると

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$$

である。λ_2 に対する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \lambda_2\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

である。これらの式は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

とまとめられる。従って $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ により、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ となる。

微分方程式は、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$、すなわち $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=\lambda_1y_1\\\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=\lambda_2y_2\end{cases}$ となる。従って、一般解は $\begin{cases}y_1(t)=C_1e^{\lambda_1t}\\y_2(t)=C_2e^{\lambda_2t}\end{cases}$ となる。$t=0$ で $\begin{pmatrix}y_1^0\\y_2^0\end{pmatrix}$ を通る解は、y_1y_2 座標で $\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1t}&0\\0&e^{\lambda_2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1^0\\y_2^0\end{pmatrix}$ となる。

x_1x_2 座標では、

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{21}&p_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11}C_1e^{\lambda_1t}+p_{12}C_2e^{\lambda_2t}\\p_{21}C_1e^{\lambda_1t}+p_{22}C_2e^{\lambda_2t}\end{pmatrix}$$

が一般解である。$t=0$ で $\begin{pmatrix}x_1^0\\x_2^0\end{pmatrix}$ を通る解は、$\begin{pmatrix}y_1^0\\y_2^0\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1^0\\x_2^0\end{pmatrix}$ だから、$\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1t}&0\\0&e^{\lambda_2t}\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}x_1^0\\x_2^0\end{pmatrix}$、従って $\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}e^{\lambda_1t}&0\\0&e^{\lambda_2t}\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}x_1^0\\x_2^0\end{pmatrix}$ となる。

例。 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-6\\3&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}4&-6\\3&-5\end{pmatrix}$ について、固有多項式は

$$\det\begin{pmatrix}\lambda-4&6\\-3&\lambda+5\end{pmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+5)+6\cdot3=\lambda^2+\lambda-2=(\lambda-1)(\lambda+2)$$

固有値 1 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, 固有値 -2 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. 従って、$A\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}$ である。$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ とおくと、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$. $t=0$ のときに $\begin{pmatrix}y_1(0)\\y_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1^0\\y_2^0\end{pmatrix}$ となる解は $\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t&0\\0&e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1^0\\y_2^0\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}x_1^0\\x_2^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1^0\\y_2^0\end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t&0\\0&e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1^0\\x_2^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2e^t&e^{-2t}\\e^t&e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^0\\x_2^0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2e^t-e^{-2t}&-2e^t+2e^{-2t}\\e^t-e^{-2t}&-e^t+2e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^0\\x_2^0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

一般解を求めるだけならば、次のように考えてよい。それぞれの固有ベクトル方向について次のようになっている。$y_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ について、$\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=y_1$ だから、$y_1=C_1e^t$. $y_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ について、$\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=-2y_2$ だから、$y_2=C_2e^{-2t}$. 従って、一般解は

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

のように書かれる。

（2）A の固有値が共役複素数 $\lambda, \overline{\lambda}$ の場合。

μ, ν を実数として $\lambda = \mu + i\nu$ とするとき、まず A が行列 $\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$ の場合を考える。この A の固有多項式は $\lambda^2 - 2\mu\lambda + \mu^2 + \nu^2 = 0$ で固有値は $\lambda = \mu + i\nu, \overline{\lambda} = \mu - i\nu$ である。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

複素数 $y_1 + iy_2$ を考えると、

$$\frac{\mathrm{d}(y_1 + iy_2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} + i\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = \mu y_1 - \nu y_2 + i(\nu y_1 + \mu y_2) = (\mu + i\nu)(y_1 + iy_2)$$

を満たす。$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \lambda z$ の解は, $e^{\lambda t}z^0$ であったが、この $e^{\lambda t}$ のテーラー展開

$$e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\lambda t)^n$$

は、複素数 λ に対しても収束しており、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\lambda t}z^0 = \lambda e^{\lambda t}z^0$ は、複素数 $\lambda,\ z^0$ に対しても成立している。

$$\begin{aligned} y_1 + iy_2 = &\quad e^{(\mu+i\nu)t}(y_1^0 + iy_2^0) = e^{\mu t}e^{i\nu t}(y_1^0 + iy_2^0) \\ = &\quad e^{\mu t}(\cos\nu t + i\sin\nu t)(y_1^0 + iy_2^0) \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\mu t}(y_1^0\cos\nu t - y_2^0\sin\nu t) \\ y_2 &= e^{\mu t}(y_1^0\sin\nu t + y_2^0\cos\nu t) \end{aligned}$$

となる。あるいは、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\mu t}\cos\nu t & -e^{\mu t}\sin\nu t \\ e^{\mu t}\sin\nu t & e^{\mu t}\cos\nu t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$$

と書かれる。

一般の $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して、固有多項式が、$\lambda^2 - 2\mu\lambda + \mu^2 + \nu^2 = 0\ (\nu \neq 0)$ となっているとする。

ハミルトン・ケイレイの定理から、次が成立する。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^2 - 2\mu\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + (\mu^2 + \nu^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ として任意のベクトルをとる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$$

となる $\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ を探しているのだから、$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ を満たす $\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ をとる。すなわち、$\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\nu}\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}\}$ とお

く。このとき、

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\nu}\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}\} \\
= & \frac{1}{\nu}\{(2\mu\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - (\mu^2+\nu^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}\} \\
= & -\nu\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + \frac{\mu}{\nu}\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}\} = -\nu\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

こうして得られた $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ により、$P^{-1}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$ となり、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおくと、$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ についての微分方程式は

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}
$$

となる。この微分方程式の解は

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\mu t}\cos\nu t & -e^{\mu t}\sin\nu t \\ e^{\mu t}\sin\nu t & e^{\mu t}\cos\nu t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}
$$

である。x_1x_2 座標では

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} e^{\mu t}\cos\nu t & -e^{\mu t}\sin\nu t \\ e^{\mu t}\sin\nu t & e^{\mu t}\cos\nu t \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}
$$

となる。

例。 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -13 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} -3 & -13 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ について、固有多項式は

$$
\det\begin{pmatrix} \lambda+3 & 13 \\ -2 & \lambda-7 \end{pmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-7) + 2\cdot 13 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda-2-i)(\lambda-2+i)
$$

となる。$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ として、

$$
\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\{\begin{pmatrix} -3 & -13 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

とおくと

$$
\begin{pmatrix} -3 & -13 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおくと、$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t & -e^{2t}\sin t \\ e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t}\cos t & -e^{2t}\sin t \\ e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}
$$

すなわち、

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t - 5e^{2t}\sin t & -13e^{2t}\sin t \\ 2e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t + 5e^{2t}\sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}
$$

$\lambda = 2+i$ に対する固有ベクトルは、$\lambda I - A = \begin{pmatrix} 5+i & 13 \\ -2 & -5+i \end{pmatrix}$ だから、$\begin{pmatrix} 5-i \\ -2 \end{pmatrix}$,

$\lambda = 2-i$ に対する固有ベクトルは、$\lambda I - A = \begin{pmatrix} 5-i & 13 \\ -2 & -5-i \end{pmatrix}$ だから、$\begin{pmatrix} 5+i \\ -2 \end{pmatrix}$

を得る。一般解は

$$C_1 e^{(2+i)t} \begin{pmatrix} 5-i \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{(2-i)t} \begin{pmatrix} 5+i \\ -2 \end{pmatrix}$$

（３）A の固有値が１つの実数 λ の場合。

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$$

をみたす。ここで、$\det \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \neq 0$ となるように、$\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ をとると、($\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ は基底となるから）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

をみたす b, c がある。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

A と $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ の固有多項式は一致する。

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - P^{-1}AP) = &\quad \det(\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I - A)P) \\ = &\quad \det P^{-1} \det(\lambda - A) \det P = \det(\lambda - A) \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ の固有値は λ, c であるから、固有値が１つの実数 λ の場合は $c = \lambda$ である。

$b = 0$ ならばスカラー行列で、$A = \lambda I$ であったことになり、$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$ となる。

$b \neq 0$ とする。固有ベクトル $\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ を $b \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ に取り替えると、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

となる（$b = 1$ にとることができる）から、この新しい $\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ で $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ と座標変換すると微分方程式は、$y_1 y_2$ 座標で

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

となるが、これは y_2 については解ける形である。$y_2(t)=e^{\lambda t}y_2^0$ となるが、このとき、y_1 についての方程式は線形非同次方程式である。

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=\lambda y_1+y_2(t)=\lambda y_1+e^{\lambda t}y_2^0$$

このような方程式の解は、定数変化法により、$y_1(t)=C(t)e^{\lambda t}$ の形で求められるのであった。これを代入すると

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}e^{\lambda t}+\lambda C(t)e^{\lambda t}=\lambda C(t)e^{\lambda t}+e^{\lambda t}y_2^0$$

すなわち、$\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}=y_2^0$ だから、$C(t)=y_2^0t+y_1^0$ となる。従って、

$$\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t}(y_2^0t+y_1^0)\\e^{\lambda t}y_2^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t}&e^{\lambda t}t\\0&e^{\lambda t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1^0\\y_2^0\end{pmatrix}$$

x_1x_2 座標では

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}e^{\lambda t}&e^{\lambda t}t\\0&e^{\lambda t}\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}x_1^0\\x_2^0\end{pmatrix}$$

となる。

例。 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&9\\-4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}-7&9\\-4&5\end{pmatrix}$ について、固有多項式は

$$\det\begin{pmatrix}\lambda+7&-9\\4&\lambda-5\end{pmatrix}=(\lambda+7)(\lambda-5)+9\cdot4=\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2$$

となる。固有値 -1 に対する固有ベクトルは、$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ である。これと線形独立（１次独立）なベクトル、例えば、$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ をとると、$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-4\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ を得る。ここで、$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$ にとりかえて、

$$\begin{pmatrix}-7&9\\-4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6&1\\-4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&1\\-4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}$$

を得る。$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&1\\-4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ とおくと、$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-t}&e^{-t}t\\0&e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1^0\\y_2^0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&1\\-4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\lambda t}&e^{\lambda t}t\\0&e^{\lambda t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{4}\\1&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^0\\x_2^0\end{pmatrix}$$

すなわち、

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6e^{-t}t+e^{-t}&9e^{-t}t\\-4e^{-t}t&6e^{-t}t+e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^0\\x_2^0\end{pmatrix}$$

参考。[YE] p. 84–97.