

2007年度幾何学特別演習II 問題 10月10日

円周  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  について、射影を  $p: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  とおく。

演習問題1 . 2つの連続関数  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  が、 $p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_2$  を満たすならば、ある整数  $n$  があって、 $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) + n$  となることを示せ。

演習問題2 . 閉区間  $[0, 1]$  から円周への連続写像  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  に対し、連続写像  $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  で  $p \circ \tilde{f} = f$  を満たすものがあることを示せ。

(ヒント: 以下の手順に従うと良い。)

(1) 円周を次の3個の開区間で被覆する。

$$V_0 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \bmod 1, \quad V_1 = \left(0, \frac{2}{3}\right) \bmod 1, \quad V_2 = \left(-\frac{2}{3}, 0\right) \bmod 1$$

ある正実数  $\delta$  に対し、定義域  $[0, 1]$  の各点  $x$  の  $\delta$  近傍  $B_x(\delta)$  の像  $f(B_x(\delta))$  は、 $V_0, V_1, V_2$  のどれかに含まれることを示せ。

ヒント: 定義域  $[0, 1]$  の開被覆  $U_i = f^{-1}(V_i)$  を考えるとよい。(裏面「問題」参照。)

(2) (1) で得られる  $\delta$  に対し、 $\frac{1}{N} < \delta$  となる自然数  $N$  をとり、 $[0, 1]$  区間を  $N$  等分すると、各区間  $[\frac{m-1}{N}, \frac{m}{N}]$  ( $m = 1, \dots, N$ ) に対し、 $\tilde{f}_m: [\frac{m-1}{N}, \frac{m}{N}] \rightarrow \mathbf{R}$  で、 $p \circ \tilde{f}_m = f|_{[\frac{m-1}{N}, \frac{m}{N}]}$  を満たすものが存在することを示せ。

(3) 求める  $\tilde{f}$  を構成せよ。

演習問題3 . 正方形  $[0, 1]^2$  から円周への連続写像  $F: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  に対し、連続写像  $\tilde{F}: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbf{R}$  で  $p \circ \tilde{F} = F$  を満たすものがあることを示せ。

(ヒント: 演習問題2と同様の手順に従うと良い。正方形を分割して辞書式順序に従って構成することができる。)

演習問題4 .  $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  に対し、 $b_{S^1} = 0 \bmod 1$  とする。

連続関数  $f: ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (S^1, b_{S^1})$  に対し、連続写像  $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  で、 $p \circ \tilde{f} = f$  かつ  $\tilde{f}(0) = 0$  となるものをとることができる。 $h(f) = \tilde{f}(1)$  とおくと  $h(f) \in \mathbf{Z}$  である。写像  $h: \text{Map}([0, 1], \{0, 1\}), (S^1, b_{S^1}) \rightarrow \mathbf{Z}$  について、 $f_1 \simeq f_2: ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (S^1, b_{S^1})$  ならば  $h(f_1) = h(f_2)$  であることを示せ。

演習問題5 . 上の  $h$  により写像  $\varphi: \pi_1(S^1, b_{S^1}) = [([0, 1], \{0, 1\}), (S^1, b_{S^1})] \rightarrow \mathbf{Z}$  が定義される。

(1)  $\varphi$  は準同型写像であることを示せ。

(2)  $\varphi$  は同型写像であることを示せ。

問題 . (1) 距離空間  $X$  の部分集合  $A$  に対し、 $X$  上の関数  $d_A(x)$  を  $d_A(x) = \inf_{a \in A} \text{dist}(x, a)$  で定義する。 $d_A : X \rightarrow \mathbf{R}$  は連続であることを示せ。

(2)  $X$  上の実数値連続関数  $f_1, \dots, f_k$  に対し、 $F(x) = \max_k f_k(x)$  で定義される関数  $F : X \rightarrow \mathbf{R}$  は連続であることを示せ。

(3) コンパクト距離空間  $X$  上の有限開被覆  $\{U_1, \dots, U_k\}$  に対し、次を満たす正実数  $\delta$  が存在することを示せ。(  $\delta$  をルベーク数と呼ぶ。 )

- すべての点  $x \in X$  の  $\delta$  近傍  $B_x(\delta)$  は、ある開集合  $U_j$  ( $j \in \{1, \dots, k\}$ ) に含まれる。