ここでは、まずホモロジー理論の公理を述べる。すべての位相空間、空間対に対して、この公理を満たすホモロジー理論が存在することは、特異ホモロジー理論を定義して、この公理を満たすことを示すことにより示される。しかし、ホモロジー群の多くの計算は公理を知ればすぐにできることが多い。そこで、ホモロジー理論の公理を説明して、容易に導かれる計算をおこなうことをこの章の目的とする。

6　ホモロジー理論の公理

6.1　完全系列

群の完全系列については、説明しているが、今後、ホモロジー群の計算のために特に必要なので、アーベル群の完全系列について説明する。

定義 6.1 (完全系列) アーベル群 A_k $(k=0,\ \dots,\ n)$ と準同型 $h_k : A_k \longrightarrow A_{k+1}$ $(k=0,\dots,n-1)$ からなる列 $A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \xrightarrow{h_1} \cdots \xrightarrow{h_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} A_n$ が完全系列であるとは $\ker(h_j)=\mathrm{im}(h_{j-1})$ が任意の整数 $j=1,\ \dots n-1$ に対して成立することである。アーベル群 A_k と準同型 $h_k : A_k \longrightarrow A_{k+1}$ の無限列に対しても、完全系列であることは、$\ker(h_j)=\mathrm{im}(h_{j-1})$ が定義されているところで成立することとする。

場合によって、準同型は $h_k : A_k \longrightarrow A_{k-1}$ の方向のこともある。

【例 6.2】　次のことは ker, im の定義、商の群の定義からわかる。

（0）$0 \longrightarrow A \xrightarrow{h} B$ が完全系列であることと、h が単射準同型であることは同値である。$A \xrightarrow{h} B \longrightarrow 0$ が完全系列であることと、h が全射準同型であることは同値である。

（1）$0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$ が完全系列ならば $A \cong 0$ である。

（2）$0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \longrightarrow 0$ が完全系列ならば、h_0 は同型写像 $A_0 \cong A_1$ である。

（3）$0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \xrightarrow{h_1} A_2 \longrightarrow 0$ が完全系列ならば $A_2 \cong A_1/h_0(A_0)$ である。

【問題 6.3】　$0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \xrightarrow{h_1} \boldsymbol{Z}^k \longrightarrow 0$ が完全系列ならば $A_1 \cong A_0 \oplus \boldsymbol{Z}^k$ を示せ。

定義 6.4　2 つの完全系列 $A_k \xrightarrow{h_k} A_{k+1},\ A'_k \xrightarrow{h'_k} A'_{k+1}$ $(k=0,\ \dots,\ n-1)$ の間の準同型とは、準同型 $f_k : A_k \longrightarrow A'_k$ $(k=0,\ \dots,\ n)$ で、$h'_k \circ f_k = f_{k+1} \circ h_k$ を満たすもののことである。

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_0 & \xrightarrow{h_0} & A_1 & \xrightarrow{h_1} & \cdots & \xrightarrow{h_{n-2}} & A_{n-1} & \xrightarrow{h_{n-1}} & A_n \\
\downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} \\
A'_0 & \xrightarrow{h'_0} & A'_1 & \xrightarrow{h'_1} & \cdots & \xrightarrow{h'_{n-2}} & A'_{n-1} & \xrightarrow{h'_{n-1}} & A'_n
\end{array}$$

【問題 6.5】　[ファイブ・レンマ] 2 つの完全系列 $A_k \xrightarrow{h_k} A_{k+1},\ A'_k \xrightarrow{h'_k} A'_{k+1}$ $(k=1,\ \dots,\ 4)$ の間の準同型 $f_k : A_k \longrightarrow A'_k$ $(k=1,\ \dots,\ 5)$ について

f_1, f_2, f_4, f_5 が同型写像ならば f_3 も同型写像であることを示せ。

【解】

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "h_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "h_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
A_1' \arrow[r, "h_1'"] & A_2' \arrow[r, "h_2'"] & A_3' \arrow[r, "h_3'"] & A_4' \arrow[r, "h_4'"] & A_5'
\end{tikzcd}
$$

について、まず f_3 が単射であること。$f_3(x_3) = 0$ とすると、$0 = h_3'(f_3(x_3)) = f_4(h_3(x_3))$ で、f_4 は同型だから、$h_3(x_3) = 0$ を得る（　）。完全性から $x_2 \in A_2$ で $x_3 = h_2(x_2)$ となるものがある（　）が、$h_2'(f_2(x_2)) = f_3(h_2(x_2)) = 0$ だから、$y_1 \in A_1'$ で、$h'(y_1) = f_2(x_2)$ となるものがある（　）。f_1 は同型だから $x_1 \in A_1$ で $f_1(x_1) = y_1$ となるものがあり（　）、$f_2(x_2) = h_1'(f_1(x_1)) = f_2(h_1(x_1))$ だから、$h_1(x_1) = x_2$ である。従って、$x_3 = h_2(h_1(x_1)) = 0$ となる。

$$
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & x_2 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & x_3 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & {} \arrow[d, mapsto] \\
y_1 \arrow[r, mapsto] & f_2(x_2) \arrow[r, mapsto] & \underset{\text{仮定}}{0} \arrow[r, mapsto] & 0 \arrow[r, mapsto] & {}
\end{tikzcd}
$$

全射であることは次のように示される。$y_3 \in A_3'$ について、$x_4 = {f_4}^{-1}h_3'(y_3) \in A_4$ をとる（　）。$h_4(x_4) = {f_5}^{-1}h_4'f_4(x_4) = {f_5}^{-1}h_4'h_3'(y_3) = 0$ だから、$x_3 \in A_3$ で $h_3(x_3) = x_4$ となるものがある（　）。$y_3 - f_3(x_3)$ について（　）、$h_3'(y_3 - f_3(x_3)) = h_3'(y_3) - h_3'(f_3(x_3)) = h_3'(y_3) - f_4(h_3(x_3)) = h_3'(y_3) - f_4(x_4) = 0$ だから、$y_2 \in A_2'$ で、$h_2'(y_2) = y_3 - f_3(x_3)$ となるものがある（　）が、$x_2 = {f_2}^{-1}(y_2)$　（　）について、$x_3 + h_2(x_2)$ をとると、$f_3(x_3 + h_2(x_2)) = f_3(x_3) + f_3(h_2(x_2)) = f_3(x_3) + h_2'(f_2(x_2)) = f_3(x_3) + y_3 - f_3(x_3) = y_3$ となる。

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & x_2 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \begin{matrix} h_2(x_2) \\ x_3 \end{matrix} \arrow[r, mapsto] & x_4 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[d, mapsto] \\
{} \arrow[r, mapsto] & y_2 \arrow[r, mapsto] & \begin{matrix} y_3 \\ y_3 - f_3(x_3) \end{matrix} \arrow[r, mapsto] & \begin{matrix} h_3'(y_3) \\ 0 \end{matrix} \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}
$$

6.2　公理

まず、ホモロジー理論とは、空間対 (X, A), 非負整数 n に対して、$H_n(X, A)$ というアーベル群がを対応させ、空間対の間の連続写像 $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ に対して、準同型写像 $f_* : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B)$ を対応させる対応であり、次の公理を満たす。$A = \emptyset$ の空間対 $(X, \emptyset)$ を空間 X と考え、$H_n(X, \emptyset)$ を $H_n(X)$ と書く。まず、名前を並べておく。

- この対応は共変関手である。
- この対応はホモトピー公理を満たす。
- 対の完全系列が存在する。この対の完全系列への対応も共変関手となる。
- 切除公理を満たす。
- 次元公理を満たす。

これらを順に説明しよう。

- 共変関手。

  「この対応は共変関手である」とは次のことである。

  (1) 空間対の間の連続写像 $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$, $g:(Y,B)\longrightarrow(Z,C)$ に対し、その結合 $g\circ f:(X,A)\longrightarrow(Z,C)$ に対応する $(g\circ f)_*: H_n(X,A)\longrightarrow H_n(Z,C)$ について、$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$ が成立する。ここで、$f_*:H_n(X,A)\longrightarrow H_n(Y,B)$, $g_*:H_n(Y,B)\longrightarrow H_n(Z,C)$ である。

  (2) 空間対 (X,A) の恒等写像 $\mathrm{id}_X:(X,A)\longrightarrow(X,A)$ に対して、$(\mathrm{id}_X)_*=\mathrm{id}_{H_n(X,A)}:H_n(X,A)\longrightarrow H_n(X,A)$ である。

  関手性により、(X,A), (Y,B) が同相ならば、各 n についてホモロジー群 $H_n(X,A)$, $H_n(Y,B)$ は同型である。

- ホモトピー公理.

  「この対応はホモトピー公理を満たす」とは、f_0, $f_1:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ がホモトピックであるとき、$(f_0)_*=(f_1)_*:H_n(X,A)\longrightarrow H_n(Y,B)$ となることである。

  この結果、(X,A) と (Y,B) がホモトピー同値ならば、各 n についてホモロジー群 $H_n(X,A)$, $H_n(Y,B)$ は同型である。

- 対の完全系列

  対の完全系列は以下のものである。

  空間対 (X,A) に対して連結準同型と呼ばれる準同型 $\partial_*:H_n(X,A)\longrightarrow H_{n-1}(A)$ が定まり、次の列が完全系列となる。

$$
\begin{array}{lllllll}
 & & & \cdots & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(X,A) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X,A) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(X,A) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-2}(A) & \xrightarrow{i_*} & \cdots & & & \\
 & & & \cdots & \xrightarrow{j_*} & H_2(X,A) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_1(A) & \xrightarrow{i_*} & H_1(X) & \xrightarrow{j_*} & H_1(X,A) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_0(A) & \xrightarrow{i_*} & H_0(X) & \xrightarrow{j_*} & H_0(X,A) & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

  ここで、$i:A\longrightarrow X$ は包含写像、$j:X=(X,\emptyset)\longrightarrow(X,A)$ である。連結準同型は、空間対の間の連続写像 $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ に対して、$\partial_*\circ f_*=\partial_*\circ(f|A)_*$ を満たし、空間対の間の連続写像に、完全系列の間の準同型が対応する。

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\partial_*"] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "(f|A)_*"] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X,A) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "(f|A)_*"] & {} \\
{} \arrow[r, "\partial_*"] & H_n(B) \arrow[r, "i_*"] & H_n(Y) \arrow[r, "j_*"] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{n-1}(B) \arrow[r, "i_*"] & {}
\end{tikzcd}
$$

- 切除公理

  切除公理は次のものである（A, B の条件については、特異ホモロジー理論で満たされるもっと緩やかなものを採用することも多い)。

$X \supset A \supset B$, A は開集合、B は閉集合とする。このとき、包含写像 $\iota : (X \backslash B, A \backslash B) \longrightarrow (X, A)$ に同型 $\iota_* : H_n(X \backslash B, A \backslash B) \longrightarrow H_n(X, A)$ が対応する。

この形では使いよいとは限らないので問題を参照。

【問題 6.6】 $X \supset A \supset B$, A 閉集合、B 開集合のとき、$A \setminus B$ を含む開集合 U で、包含写像 $(X, A) \longrightarrow (X, A \cup U)$, $(X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow ((X \setminus B) \cup U, U)$ がホモトピー同値となるものがあれば、$H_*(X \setminus B, A \setminus B) \cong H_*(X, A)$ となることを示せ。

【問題 6.6 の解答】 $H_*(X \setminus B, A \setminus B) \cong H_*((X \setminus B) \cup U, U) \cong H_*(X, A \cup U) \cong H_*(X, A)$

- 次元公理

  次元公理とは次のものである。

  １点 p からなる位相空間 $\{p\}$ に対して、$H_n(\{p\}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (n=0) \\ 0 & (n>0) \end{cases}$

6.3 公理の帰結

多くの空間 (X, A) に対して，計算は上の性質だけからでもできる。

【例 6.7】 $H_n(X, X) \cong H_n(\emptyset, \emptyset) = H_n(\emptyset) \cong 0 \ (n \geqq 0)$.

空間対 (X, X) に対して、切除公理を用いれば、$H_n(X, X) \cong H_n(\emptyset, \emptyset) = H_n(\emptyset)$ である。対の完全系列、

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & \cdots & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(X,X) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_n(X) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X,X) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(X) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(X,X) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-2}(X) & \xrightarrow{i_*} & \cdots & &
\end{array}
$$

であるが、$i_* = (\mathrm{id}_X)_*$ で、関手性から、$(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{H_n(X)}$ であるから、∂_*, j_* はともに零準同型であり、$X_n(X, X) \cong 0$ となる。従って、$H_n(\emptyset) \cong 0$ である。

【例 6.8】 X が 1 点 $\{p\}$ とホモトピー同値ならば、ホモトピー公理と次元公理から、$H_n(\{p\}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (n=0) \\ 0 & (n>0) \end{cases}$ このとき、任意の写像 $c : \{p\} \longrightarrow X$ は、同型写像 $\boldsymbol{Z} \cong H_0(\{p\}) \longrightarrow H_0(X) \cong \boldsymbol{Z}$ を導く。$x \in X$ に対して $c_x : \{p\} \longrightarrow X$ を x を値とする定値写像とすると、c_x は互いにホモトピックであるから、$(c_x)_*(1)$ は $H_0(X)$ の同じ元である。この元を $H_0(X) \cong \boldsymbol{Z}$ の 1 に対応する生成元とすることにする。こうして、１点からの写像による上の同型は $\boldsymbol{Z}$ の恒等写像と考える。

【問題 6.9】 $X = X_1 \cup X_2$, X_1, X_2 は開集合とすると、各 n に対して $H_n(X) \cong H_n(X_1) \oplus H_n(X_2)$ を示せ。

【問題 6.9 の解答】 空間対の間の写像、$(X_1, \emptyset) \longrightarrow (X, X_2)$, $(X_2, X_2) \longrightarrow (X, X_2)$ がそれぞれの完全系列に誘導する準同型写像から、空間対 $(X_1, \emptyset)$ のホモロジー完全系列空間対 (X_2, X_2) のホモロジー完全系列の直和から空間対 (X, X_2) のホモロジー

完全系列への準同型写像が得られる。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
H_{n+1}(X,X_2) & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(X_2) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X,X_2) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(X_2) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\begin{array}{c} H_{n+1}(X_1) \\ \oplus \\ H_{n+1}(\emptyset) \end{array} & \xrightarrow{\partial_*} & \begin{array}{c} H_n(\emptyset) \\ \oplus \\ H_n(X_2) \end{array} & \xrightarrow{i_*} & \begin{array}{c} H_n(X_1) \\ \oplus \\ H_n(X_2) \end{array} & \xrightarrow{j_*} & \begin{array}{c} H_n(X_1) \\ \oplus \\ H_n(\emptyset) \end{array} & \xrightarrow{\partial_*} & \begin{array}{c} H_{n-1}(\emptyset) \\ \oplus \\ H_{n+1}(X_2) \end{array}
\end{array}
$$

ここで、$H_n(X_1) \longrightarrow H_n(X,X_2)$ は切除公理により同型である。ファイブ・レンマから $H_n(X) \cong H_n(X_1) \oplus H_n(X_2)$ が得られる。

7　球面のホモロジー群

この小節では、次を示す。

命題 7.1 $n \geqq 1$ に対して、$D^n = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq 1\}$, $S^{n-1} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ とする。このとき、

$$
H_k(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (k=n) \\ 0 & (k \neq n) \end{cases}, \qquad H_k(S^n) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (k=0,\ n) \\ 0 & (k \neq 0,\ n) \end{cases}
$$

2 点 S^0 のホモロジー群については、問題 6.9 により、$H_*(S^0) \cong H_*(\{p\}) \oplus H_*(\{p\})$ すなわち、$H_n(S^0) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} & (n=0) \\ 0 & (n>0) \end{cases}$ がわかっている。

命題 7.1 の証明は次元の低いものから順に決めることで行われる。

最初に $(D^1, S^0) = ([-1,1], \{-1,1\})$ を考える。

$$
\begin{array}{l}
\xrightarrow{\partial_*} H_2(\{-1,1\}) \xrightarrow{i_*} H_2([-1,1]) \xrightarrow{j_*} H_2([-1,1],\{-1,1\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} H_1(\{-1,1\}) \xrightarrow{i_*} H_1([-1,1]) \xrightarrow{j_*} H_1([-1,1],\{-1,1\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} H_0(\{-1,1\}) \xrightarrow{i_*} H_0([-1,1]) \xrightarrow{j_*} H_0([-1,1],\{-1,1\}) \longrightarrow 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccl}
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} H_2([-1,1],\{-1,1\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} H_1([-1,1],\{-1,1\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} H_0([-1,1],\{-1,1\}) \longrightarrow 0
\end{array}
$$

この完全系列から $H_k([-1,1],\{-1,1\}) \cong 0$ $(k \geqq 2)$ がわかる。

例 6.8 の可縮な空間の H_0 の生成元の決め方により、$i_*(n_1,n_2) = n_1 + n_2$ がわかる。従って

$$
H_0([-1,1],\{-1,1\}) \cong 0, \quad H_1([-1,1],\{-1,1\}) \cong \boldsymbol{Z}.
$$

これが、命題 7.1 の (D^1, S^0) の場合である。

$m \in \boldsymbol{Z} \cong H_1([-1,1],\{-1,1\})$ に対し、$\partial_* m = (m,-m)$ または $\partial_* m = (-m,m)$ ととれる。この一方を定めることは $[-1,1]$ に向きを定めることと一致する。通常 $\overrightarrow{[-1,1]}$ という向きで, $H_1([-1,1],\{-1,1\}) = H_1(D^1,S^0)$ の生成元を $[D^1, \partial S^0]$ とするとき、

$$
\partial_*[D^1, \partial S^0] = \langle 1 \rangle - \langle -1 \rangle = (-1,1) \in \boldsymbol{Z}\langle -1 \rangle \oplus \boldsymbol{Z}\langle 1 \rangle = H_0(\{-1,1\})
$$

と向きをつける。

さて、$S^1 = \{(x_1,x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1\}$ のホモロジー群を計算しよう。$S^1_+ = \{x = (x_1,x_2) \in S^1 \mid x_2 \geqq 0\}$, $S^1_- = \{x = (x_1,x_2) \in S^1 \mid x_2 \leqq 0\}$ とする。

空間対 (S^1,S^1_+) のホモロジー完全系列は次のようになる。

$$\begin{array}{rcl} & H_2(S^1_+) \xrightarrow{i_*} H_2(S^1) \xrightarrow{j_*} H_2(S^1,S^1_+) & \\ \xrightarrow{\partial_*} & H_1(S^1_+) \xrightarrow{i_*} H_1(S^1) \xrightarrow{j_*} H_1(S^1,S^1_+) & \\ \xrightarrow{\partial_*} & H_0(S^1_+) \xrightarrow{i_*} H_0(S^1) \xrightarrow{j_*} H_0(S^1,S^1_+) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccl} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_2(S^1) & \xrightarrow{j_*} & 0 & & \\ \xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_1(S^1) & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & & \\ \xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^1) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \longrightarrow 0 \end{array}$$

下の列は上の列のわかっているところを書いたものである。ここで、切除公理から $H_1(S^1,S^1_+)\cong H_1(S^1_-,\partial S^1_-)$, また、写像 $(S^1_-,\partial S^1_-)\longrightarrow(D^1,S^0)$ を $(x_1,x_2)\longmapsto x_1$ により定めると、これは同相であるから、$H_1(S^1_-,\partial S^1_-)\cong H_1(D^1,S^0)$ を使っている。この完全系列から $H_k(S^1)\cong 0$ $(k\geqq 2)$ がわかる。

$\partial_*\,:\,H_1(S^1,S^1_+)\longrightarrow H_0(S^1_+)$ を調べるために包含写像 $(S^1_-,\partial S^1_-)\longrightarrow(S^1,S^1_+)$ が誘導する $(S^1_-,\partial S^1_-)$ の完全系列と (S^1,S^1_+) の完全系列の間の写像を見ると $\partial S^1_-=\{b_-,b_+\}$ $(b_\pm=(\pm1,0))$ として、$\partial_*[S^1_-,\partial S^1_-]=\langle b_+\rangle-\langle b_-\rangle$ となっている。例 6.8 により、$\langle b_+\rangle,\langle b_-\rangle$ は包含写像 $(S^1_-,\partial S^1_-)\longrightarrow(S^1,S^1_+)$ によって $H_0(S^1_+)$ の同じ生成元に写る。従って、$\partial_*[S^1_-,\partial S^1_-]$ は 0 に写るから、∂_* は零写像となる。

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{(1,-1)} & \boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} \\ H_1(S^1_-,\{b_-,b_+\}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_0(\{b_-,b_+\}) & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^1_-) \\ \downarrow\cong & & \downarrow & & \\ H_1(S^1,S^1_+) & \xrightarrow{\partial_*} & H_0(S^1_+) & & \\ \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & & \end{array}$$

従って、$H_1(S^1)\cong\boldsymbol{Z}$, $H_0(S^1)\cong\boldsymbol{Z}$ が得られる。これが命題 7.1 の S^1 の場合である。$H_0(S^1)$ の生成元は、可縮な $H_0(S^1_+)$ の生成元の像であるから $x\in S^1$ について $H_0(\{x\})$ の生成元 $\langle x\rangle$ の像である。あるいは、定値写像 $c_x:\{p\}\longrightarrow S^1$ について $(c_x)_*1$ である。$H_1(S^1)$ の生成元 $[S^1]$ は $j_*[S^1]=[S^1,S^1_+]\longleftarrow[S^1_-,\partial S^1_-]$ により定まっている。

次は、(D^2,S^1) である。ホモロジー完全系列を書き、わかっているところを書き換えると以下のようになる。

$$\begin{array}{rcl} \xrightarrow{\partial_*} & H_2(S^1) \xrightarrow{i_*} H_2(D^2) \xrightarrow{j_*} H_2(D^2,S^1) & \\ \xrightarrow{\partial_*} & H_1(S^1) \xrightarrow{i_*} H_1(D^2) \xrightarrow{j_*} H_1(D^2,S^1) & \\ \xrightarrow{\partial_*} & H_0(S^1) \xrightarrow{i_*} H_0(D^2) \xrightarrow{j_*} H_0(D^2,S^1) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccl} \xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_2(D^2,S^1) \\ \xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_1(D^2,S^1) \\ \xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} & H_0(D^2,S^1) \longrightarrow 0 \end{array}$$

$H_0(S^1)$ と $H_0(D^2)$ の生成元は、ともに任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であるから、$H_0(S^1)\xrightarrow{i_*}H_0(D^2)$ は同型であり、この完全系列から $H_k(D^2,S^1)\cong\boldsymbol{Z}$ $(k=2)$, $H_k(D^2,S^1)\cong 0$ $(k\neq 2)$ がわかる。このとき、$H_2(D^2,S^1)$ の生成元 $[D^2,S^1]$ は、$\partial_*[D^2,S^1]=[S^1]\in H_1(S^1)$ と定める。

次に $S^2=\{(x_1,x_2,x_3)\in\boldsymbol{R}^3\;\big|\;{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2=1\}$ のホモロジー群を計算する。$S^2_+=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in S^2\;\big|\;x_3\geqq 0\}$, $S^2_-=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in$

$S^2 \mid x_3 \leqq 0\}$ とする。

空間対 (S^2, S^2_+) のホモロジー完全系列は次のようになる。

$$
\begin{array}{lllllll}
 & H_2(S^2_+) & \xrightarrow{i_*} & H_2(S^2) & \xrightarrow{j_*} & H_2(S^2, S^2_+) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_1(S^2_+) & \xrightarrow{i_*} & H_1(S^2) & \xrightarrow{j_*} & H_1(S^2, S^2_+) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_0(S^2_+) & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^2) & \xrightarrow{j_*} & H_0(S^2, S^2_+) & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_2(S^2) & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_1(S^2) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^2) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

下の列は上の列のわかっているところを書いたものである。ここで、切除公理から $H_k(S^2, S^2_+) \cong H_k(S^2_-, \partial S^2_-)$ $(k \geqq 0)$, また、写像 $(S^2_-, \partial S^2_-) \longrightarrow (D^2, S^1)$ を、$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, x_2)$ により定めると、これは同相であるから、$H_k(S^2_-, \partial S^2_-) \cong H_k(D^2, S^1)$ を使っている。この完全系列から $H_k(S^2) \cong \boldsymbol{Z}$ $(k = 0,\ 2)$, $H_k(S^2) \cong 0$ $(k \neq 0,\ 2)$ がわかる。$H_0(S^2)$ の生成元は任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であり、$H_2(S^2)$ の生成元 $[S^2]$ は $j_*[S^2] = [S^2, S^2_+] \longleftarrow [S^2_-, \partial S^2_-]$ により定まっている。

これより次元の高いものについての議論は、(D^2, S^1), S^2 の議論と同じである。念のために、書いておくと以下の通りである。

命題 7.1 が n に対して正しいとし、$H_0(S^n)$ の生成元は、任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であるとする。

(D^{n+1}, S^n) のホモロジー群について、空間対 (D^{n+1}, S^n) のホモロジー完全系列を書き、わかっているところを書き換えると以下のようになる。

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & H_{n+2}(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+2}(D^{n+1}, S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n+1}(S^n) & \xrightarrow{i_*} & H_{n+1}(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(D^{n+1}, S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_n(S^n) & \xrightarrow{i_*} & H_n(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_n(D^{n+1}, S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(S^n) & \xrightarrow{i_*} & \cdots & & & \\
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & H_1(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_1(D^{n+1}, S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_0(S^n) & \xrightarrow{i_*} & H_0(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_0(D^{n+1}, S^n) & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_{n+2}(D^{n+1}, S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(D^{n+1}, S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_n(D^{n+1}, S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & \cdots & & & \\
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_1(D^{n+1}, S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} & H_0(D^{n+1}, S^n) & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

$H_0(S^n)$ と $H_0(D^{n+1})$ の生成元は、ともに任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であるから、$H_0(S^n) \xrightarrow{i_*} H_0(D^{n+1})$ は同型であり、この完全系列から $H_k(D^{n+1}, S^n) \cong \boldsymbol{Z}$ $(k = n+1)$, $H_k(D^{n+1}, S^n) \cong 0$ $(k \neq n+1)$ がわかる。このとき、$H_{n+1}(D^{n+1}, S^n)$ の生成元 $[D^{n+1}, S^n]$ は、$\partial_*[D^{n+1}, S^n] = [S^n] \in H_n(S^n)$ と定める。

次に $S^{n+1} = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \boldsymbol{R}^{n+2} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ のホモロジー群を計算する。$S^{n+1}_+ = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in S^{n+1} \mid x_{n+2} \geqq 0\}$, $S^2_- = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n+2} \in S^{n+1} \mid x_{n+2} \leqq 0\}$ とする。

空間対 (S^{n+1}, S^{n+1}_+) のホモロジー完全系列は次のようになる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & H_{n+2}(S^{n+1}_+) & \xrightarrow{i_*} & H_{n+2}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+2}(S^{n+1}, S^{n+1}_+) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n+1}(S^{n+1}_+) & \xrightarrow{i_*} & H_{n+1}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(S^{n+1}, S^{n+1}_+) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n}(S^{n+1}_+) & \xrightarrow{i_*} & H_{n}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n}(S^{n+1}, S^{n+1}_+) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \cdots & & & & & \\
 & & & \cdots & \xrightarrow{j_*} & H_{1}(S^{n+1}, S^{n+1}_+) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{0}(S^{n+1}_+) & \xrightarrow{i_*} & H_{0}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{0}(S^{n+1}, S^{n+1}_+) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_{n+2}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_{n+1}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_{n}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \cdots & & & & & \\
 & & & \cdots & \xrightarrow{j_*} & 0 & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & H_{0}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \longrightarrow 0
\end{array}$$

下の列は上の列のわかっているところを書いたものである。ここで、切除公理から $H_k(S^{n+1}, S^{n+1}_+) \cong H_k(S^{n+1}_-, \partial S^{n+1}_-)$ $(k \geqq 0)$, また、写像 $(S^{n+1}_-, \partial S^{n+1}_-) \longrightarrow (D^{n+1}, S^n)$ を、$(x_1, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}) \longmapsto (x_1, \ldots, x_{n+1})$ により定めると、これは同相であるから、$H_k(S^{n+1}_-, \partial S^{n+1}_-) \cong H_k(D^{n+1}, S^n)$ を使っている。この完全系列から $H_k(S^{n+1}) \cong \boldsymbol{Z}$ $(k = 0, n+1)$, $H_k(S^{n+1}) \cong 0$ $(k \neq 0, n+1)$ がわかる。$H_0(S^{n+1})$ の生成元は任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であり、$H_{n+1}(S^{n+q})$ の生成元 $[S^{n+1}]$ は $j_*[S^{n+1}] = [S^{n+1}, S^{n+1}_+] \longleftarrow [S^{n+1}_-, \partial S^{n+1}_-]$ により定まっている。以上により命題 7.1 が証明された。

8 円周から円周への写像の写像度

$H_0(S^1) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_1(S^1) \cong \boldsymbol{Z}$ である。連続写像 $f : S^1 \longrightarrow S^1$ は準同型 $f_* : H_0(S^1) \longrightarrow H_0(S^1)$, $f_* : H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1)$ を誘導する。

$f_* : H_0(S^1) \longrightarrow H_0(S^1)$ は $\times 1 : \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ である。実際、$H_0(S^1)$ の生成元は任意の写像 $c_x : \{p\} \longrightarrow S^1$ $(x \in S^1)$ による $H_0(\{p\})$ の生成元の像 $(c_x)_*1$ である。$f \circ c_x = c_{f(x)}$ だから、$f_* : H_0(S^1) \longrightarrow H_0(S^1)$ は $\times 1 : \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ である。

$f_* : H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1)$ に対しては、同型 $H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1, S^1_-)$ について考える。特別な写像 $f_m(x) = mx \bmod 1$ に対して、$(f_m)_* = m\times : \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ である。また、任意の $g : S^1 \longrightarrow S^1$ に対し、ある $m \in \boldsymbol{Z}$ について $g \simeq f_m$ となることを示す。

（1）$f : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ を $f(x) = -x$ とするとき、
$\deg(f : (D^1, S^0) \longrightarrow (D^1, S^0)) = -1$ である。

実際、$[D^1, S^0] \in H^1(D^1, S^0)$ は、$\partial_*[D^1, S^0] = \langle 1 \rangle - \langle -1 \rangle \in H_0(\{-1, 1\})$ で定まっている。$(f|S^0)_*(\langle 1 \rangle - \langle -1 \rangle) = \langle -1 \rangle - \langle 1 \rangle$ であるから、下の図式が可換になるので、$f_*[D^1, S^0] = -[D^1, S^0]$ となる。

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(D^1, S^0) \ni & [D^1, S^0] & \overset{\partial_*}{\longmapsto} & \langle 1 \rangle - \langle -1 \rangle & \in & H_0(\{-1, 1\}) \\
f_* \downarrow & \downarrow f_* & & (f|S^0)_* \downarrow & & \downarrow (f|S^0)_* \\
H^1(D^1, S^0) \ni & -[D^1, S^0] & \underset{\partial_*}{\longmapsto} & \langle -1 \rangle - \langle 1 \rangle & \in & H_0(\{-1, 1\})
\end{array}$$

（２）$\iota:[-1,1]\longrightarrow D^1$ を像への同相写像とする。

$$H_1([-1,1],\{-1,1\})\xrightarrow{\iota_*}H_1(D^1,D^1\setminus\mathrm{Int}(\iota([-1,1])))\xleftarrow{j_*}H_1(D^1,S^0)$$

について、$\iota_*[[-1,1],\{-1,1\}]=\pm j_*[D^1,S^0]$ で、$\pm$ は ι が向きを保つとき $+$, 向きを反対にするとき $-$ となる。ι が向きを保つとき、$\iota:([-1,1],-1,1)\longrightarrow(D^1,D^1\setminus\mathrm{Int}(\iota([-1,1])),\ j=\mathrm{id}:([-1,1],-1,1)\longrightarrow(D^1,D^1\setminus\mathrm{Int}(\iota([-1,1]))$ はホモトピックである。実際 $F(s,t)=s\iota(t)+(1-s)i(t)$ がホモトピーを与える。従って、ι が向きを保つとき、$\iota_*[[-1,1],\{-1,1\}]=j_*[D^1,S^0]$ である。ι が向きを反対にするとき、（１）の f を使って $\iota\circ f$ は向きを保つから、$\iota_*f_*[[-1,1],\{-1,1\}]=j_*[D^1,S^0]$ となる。従って $\iota_*[[-1,1],\{-1,1\}]=-j_*[D^1,S^0]$ となる。

（３）$\iota:D^1\longrightarrow S^1$ を像への同相写像とする。

$$H_1(S^1)\xrightarrow{j_*}H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota(D^1)))\xleftarrow{\iota_*}H_1(D^1,S^0)$$

について、$\iota_*[D^1,S^0]=\pm j_*[S^1]$ で、$\pm$ は ι が向きを保つとき $+$, 向きを反対にするとき $-$ となる。

$[S^1]\in H^1(S^1)$ は $(j_{S^1_+})_*[S^1]=[S^1,S^1_+]=(i_{S^1})_*[S^1_-,S^0]\in H^1(S^1,S^1_+)$ で定まっている。同相写像 $(S^1,S^1_+)\longrightarrow(S^1,S^1-\mathrm{Int}(\iota(D^1)))$ が存在するので、j_* は同型である。向きと符号の関係については以下を用いて考える。$\iota_1(D^1)\subset\iota_2(D^1)$ となる２つの埋め込みについて、

$$\begin{array}{ccccc}
H_1(S^1)\longrightarrow & H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota_2(D^1)))\longrightarrow & & H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota_1(D^1))) \\
& \uparrow & & \uparrow \\
& H_1(\iota_2(D^1),\partial\iota_2(D^1)) & \longrightarrow & H_1(\iota_2(D^1),\iota_2(D^1)\setminus\mathrm{Int}(\iota_1(D^1))) \\
& & & \uparrow \\
& & & H_1(\iota_1(D^1),\partial\iota_1(D^1))
\end{array}$$

において、$[S^1]$, $[\iota_1(D^1),\partial\iota_1(D^1)]$, $[\iota_1(D^1),\partial\iota_1(D^1)]$ は、$H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota_1(D^1)))$ の同じ生成元に写っている。

まず、任意の $\iota(D^1)\subset S^1_-$ について、ι が向きを保つならば、（２）から $\iota_*[D^1,S^0]=j_*[S^1]\in H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota(D^1)))$ となる。ι_2 が向きを保ち、$\mathrm{Int}(\iota_2(D^1)\cap S^1_-)\neq\emptyset$ ならば、$\iota_1(D^1)\subset\mathrm{Int}(\iota_2(D^1)\cap S^1_-)$ となる向きを保つ ι_1 をとると、$(\iota_2)_*[D^1,S^0]=j_*[S^1]\in H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota_1(D^1)))$ から、$(\iota_2)_*[D^1,S^0]=j_*[S^1]\in H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota_2(D^1)))$ がわかる。ι_2 が向きを保ち、$\mathrm{Int}(\iota_2(D^1)\cap S^1_-)=\emptyset$ ならば、向きを保つ ι_3 で、$\mathrm{Int}(\iota_2(D^1)\cap\iota_3(D^1))\neq\emptyset$, $\mathrm{Int}(\iota_3(D^1)\cap S^1_-)\neq\emptyset$ となるものをとれば、向きを保つ $\iota_1(D^1)\subset\mathrm{Int}(\iota_2(D^1)\cap\iota_3(D^1))$ に対して、$(\iota_3)_*[D^1,S^0]=j_*[S^1]\in H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota_3(D^1)))$, $(\iota_2)_*[D^1,S^0]=(\iota_3)_*[D^1,S^0]\in H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota_1(D^1)))$ となる。従って $(\iota_2)_*[D^1,S^0]=j_*[S^1]\in H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota_2(D^1)))$ がわかる。

ι が向きを反対にする場合は、（２）の f を用いて $\iota\circ f$ を考えれば、向きを保ち、$\iota_*f_*[D^1,S^0]=j_*[S^1]$ となる。従って、$\iota_*[D^1,S^0]=-j_*[S^1]$ となる。従って、

（４）$f_k:S^1\longrightarrow S^1$ を $f_k(e^{2\pi\sqrt{-1}\theta})=e^{2k\pi\sqrt{-1}\theta}$ で定義する。$\deg(f_k)=k$ となる。

${f_k}^{-1}(S^1_+)=J_k$ とおく。$S^1\cong\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 上では $J_k=\displaystyle\bigcup_{i=0}^{k-1}[\frac{2i}{2k},\frac{2i+1}{2k}]$ $(k\geqq1)$, $J_0=S^1$, $J_{-k}=\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k}[\frac{2i-1}{2k},\frac{2i}{2k}]$ $(k\geqq1)$ のように表される。

$k \geqq 1$ とする。$f_k : (S^1, J_k) \longrightarrow (S^1, S^1_+)$ をみると、

$$H_1(S^1, J_k) \cong \bigoplus_{i=1}^{k} H_1([\frac{2i-1}{2k}, \frac{2i}{2k}], \{\frac{2i-1}{2k}, \frac{2i}{2k}\}) \cong \boldsymbol{Z}^k$$

である。

$$f_k|([\frac{2i-1}{2k}, \frac{2i}{2k}], \{\frac{2i-1}{2k}, \frac{2i}{2k}\}) \longrightarrow (S^1_-, \partial S^1_-)$$

は向きを保つ同相写像であるから、$(f_k)_*[[\frac{2i-1}{2k}, \frac{2i}{2k}], \{\frac{2i-1}{2k}, \frac{2i}{2k}\}] = [S^1_-, \partial S^1_-]$ となる。$[[\frac{2i-1}{2k}, \frac{2i}{2k}], \{\frac{2i-1}{2k}, \frac{2i}{2k}\}] = j_*[S^1]$ であるから、

$$\begin{aligned} j_*(f_k)_*[S^1] &= (f_k)_*[S^1, J_k] \\ &= \sum_{i=1}^{k} (f_k)_*[[\frac{2i-1}{2k}, \frac{2i}{2k}], \{\frac{2i-1}{2k}, \frac{2i}{2k}\}] \\ &= k[S^1, S^1_+] = j_*(k[S^1]) \end{aligned}$$

である。従って、$\deg(f_k) = k$ である。

$k = 0$ のときは、$f_0 = c_b \circ c_p$ $c_p : S^1 \longrightarrow \{p\}$, $c_b : \{p\} \longrightarrow S^1$ となり、$f_* = (c_b)_*(c_p)_*$ であるが、$H_1(\{p\}) \cong 0$ だから、$(f_0)_* = 0$ である。

$k = -1$ のとき、$(f_{-1})_*[S^1] = -[S^1]$ となる。$f_{-1} : (S^1, S^1_+) \longrightarrow (S^1, S^1_-)$ であるが、

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(S^1, S^1_+) & \ni & [S^1, S^1_+] & \xleftarrow{i_*} & [S^1_-, \partial S^1_-] & \in & H_1(S^1_-, \partial S^1_-) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* & & f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ H_1(S^1, S^1_-) & \ni & -[S^1, S^1_-] & \xleftarrow{i_*} & -[S^1_+, \partial S^1_+] & \in & H_1(S^1_+, \partial S^1_+) \end{array}$$

$[S^1] \longmapsto [S^1, S^1_+]$, $-[S^1] \longmapsto -[S^1, S^1_-]$ だから、$f_*([S^1] = -[S^1]$ となる。

一方、円周から円周への写像 g はある f_m にホモトピックである。

実際、円周の基本群について議論したように、合成写像 $g \circ p : [0,1] \longrightarrow S^1 \longrightarrow S^1$ に対し、$\widetilde{g \circ p} : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ で、$p \circ \widetilde{g \circ p} = g \circ p$ となるものがある。$m = \widetilde{g \circ p}(1) - \widetilde{g \circ p}(0)$ とするとき、$f_m \circ p$ は $\widetilde{f_m \circ p}(x) = mx$ ととることができる。$\widetilde{F}(t,x) = (1-t)\widetilde{g \circ p}(x) + t\widetilde{f_m \circ p}(x)$ とおくと、$\widetilde{F}(t,1) = (1-t)\widetilde{g \circ p}(1) + t\widetilde{f_m \circ p}(1) = (1-t)(\widetilde{g \circ p}(0) + m) + tm = (1-t)\widetilde{g \circ p}(0) + m = (1-t)\widetilde{g \circ p}(0) + t\widetilde{f_m \circ p}(0) + m$ であり、連続写像 $F : [0,1] \times S^1 \longrightarrow S^1$ を引き起こす。従って、g は f_m とホモトピックとなる。このとき、$g_* = m\times : H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1)$ となる。

9　球面から球面への写像の写像度

n を 2 以上の整数として、$H_n(S^n) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_0(S^n) \cong \boldsymbol{Z}$ である。連続写像 $g : S^n \longrightarrow S^n$ に対して、$g_* : H_0(S^n) \longrightarrow H_0(S^n)$ は, 円周の場合と同様に $1\times : \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ である。$g_* : H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n)$ は、ある整数 m に対して、$m\times : \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ である。この m を g の写像度と呼び、$\deg(g)$ と書く。

$g : S^k \longrightarrow S^k$ に対して $Sg : S^{k+1} \longrightarrow S^{k+1}$ を

$$Sg(x_1, \ldots, x_{k+1}, x_{k+2}) = (\sqrt{1 - {x_{k+2}}^2}\, g(\frac{1}{\sqrt{1 - {x_{k+2}}^2}}(x_1, \ldots, x_{k+1})), x_{k+2})$$

で定義する。このとき、$\deg(g) = \deg(Sg)$ である。

実際、空間対 (S_-^{k+1}, S^k) のホモロジー完全系列 $H_{k+1}(S_-^{k+1}) \longrightarrow H_{k+1}(S_-^{k+1}, S^k) \longrightarrow H_k(S^k) \longrightarrow H_k(S_-^{k+1})$ への $Sg|S_-^{k+1}$ の作用は、

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (Sg|S_-^{k+1})_*} & & \downarrow{\scriptstyle (Sg|S^k)_*} & & \downarrow \\
0 & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0
\end{array}$$

において、$(Sg|S^k)_*$ は $m\times$ であるから、$(Sg|S_-^{k+1})_*$ も $m\times$ である。

さらに、空間対 (S^{k+1}, S_+^{k+1}) ののホモロジー完全系列 $H_{k+1}(S_+^{k+1}) \longrightarrow H_{k+1}(S^{k+1}) \longrightarrow H_{k+1}(S^{k+1}, S_+^{k+1}) \longrightarrow H_k(S_+^{k+1})$ への Sg の作用は、

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (Sg)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (Sg)_*} & & \downarrow \\
0 & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & 0
\end{array}$$

において、$(Sg)_* : H_{k+1}(S^{k+1}, S_+^{k+1}) \longrightarrow H_{k+1}(S^{k+1}, S_+^{k+1})$ は切除公理により、準同型 $(Sg|S_-^{k+1})_* : H_{k+1}(S_-^{k+1}, S^k) \longrightarrow H_{k+1}(S_-^{k+1}, S^k)$ と同一視され、これは $m\times$ であるから、$(Sg)_*$ も $m\times$ である。