1 空間の分類

高等学校まででは、多角形、多面体、円、球面など基本的な図形の性質を学び、大学の１年次２年次では、空間の曲線、曲面等の取り扱い、また幾何学　（多様体入門）では、多くの興味深い空間を含む一般の多様体について学んだ。

位相空間の分類は、２つの位相空間の間に同相写像が存在すれば同じ考えるのが自然であり、多様体の分類は、２つの多様体の間に微分同相写像が存在すれば同じ考えるのが自然である。これらの意味で同じであることを示すためには、同相写像あるいは微分同相写像を構成するか、構成できることを証明する必要がある。

一方、同じでないことを示すためにはどうすればよいであろうか。

まず次の図形は、実際に同相ではないが、その理由は何であろうか。

- 整数全体に離散位相を入れた空間 $\boldsymbol{Z}$
- 実数直線 $\boldsymbol{R}$
- 円周 S^1
- カントール集合 C（$\{0,1\}$ の可算個の直積に積位相をいれたもの）
- 平面 $\boldsymbol{R}^2$

これらの空間の違いを列挙すると以下のようになる。

- 同相写像が存在するためには、全単射が存在する必要があるが、集合の元の個数は $\boldsymbol{Z}$ とそれ以外とでは異なっている。従って、$\boldsymbol{Z}$ は上のそれ以外のものとは同相にならない。
- 位相空間の性質として、コンパクト性があるが、円周 S^1, カントール集合 C はコンパクトであるが、そのほかはコンパクトではない。
- 位相空間の性質として、連結性があるが、$\boldsymbol{Z}$ およびカントール集合は連結ではない。

ここまでの区別を表にまとめると次の表の最後の列を除いたものができる。

	元の個数（濃度）	コンパクト	連結	１点の補空間が連結
$\boldsymbol{Z}$	$\aleph^0$	×	×	×
$\boldsymbol{R}$	$\aleph^1$	×	○	×
円周 S^1	$\aleph^1$	○	○	○
カントール集合 C	$\aleph^1$	○	×	×
$\boldsymbol{R}^2$	$\aleph^1$	×	○	○

ここまででは、実数直線 $\boldsymbol{R}$ と平面 $\boldsymbol{R}^2$ が区別できていない。そこで次のアイデアが使われる。

- １点を取り除いた空間をみる。

こうすると、$\boldsymbol{R} \setminus \{$ １点 $\}$ は連結ではないが、$\boldsymbol{R}^2 \setminus \{$ １点 $\}$ は連結であるので、実数直線 $\boldsymbol{R}$ と平面 $\boldsymbol{R}^2$ が区別できる。

さてそれでは、$\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{R}^3$, ... はすべて同相ではないことがわかるだろうか。２次元以上のユークリッド空間では、１点を取り除いた空間は連結になるから、$\boldsymbol{R}$ と２次元以上のユークリッド空間が同相ではないことはわかるが、すぐにはそれ以上のことはわからない。しかし、「１点を取り除いた空間をみる」という考え方は正しく、実際には、１点を取り除いた空間の上の２点を結ぶ自由度を量ることによって区別されることになる。

注意 1.1 (1) サードの定理 [多様体入門：定理 5.4.1] によれば、$m < n$ のときに微分可能な全射 $\boldsymbol{R}^m \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ は存在しない。微分構造を考えれば、次元の違うユークリッド空間は微分同相ではないことがわかる。

(2) 連続な全射 $[0,1] \longrightarrow [0,1]^2$ であるペアノ曲線の構成と同様に、連続な全射 $\boldsymbol{R}^m \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ が構成できる。

上で表に書いたことは何を意味しているだろうか。２つの空間を区別するためには、ある性質に注目して、その性質を持つかどうかをみるということが必要だということである。性質が成立するかしないかは、〇×あるいは $\{0,1\}$ に値を持つ量ということである。様々な量をこれから問題にするが、整数あるいは実数に値を持つものが最も扱いやすい。このような、同じと考えるものの上で同じ値を持つ量を不変量という。２つの空間を区別するためには、不変量を定義して、それが異なることを示すことが必要である。

2　連結性と弧状連結性

定義 2.1 (連結) 位相空間 X が連結とは、次のような空ではない開集合 U, V が存在しないことである。

$$U \cup V = X \text{ かつ } U \cap V = \emptyset$$

定義 2.2 (弧状連結) 位相空間 X が弧状連結とは、X の任意の２点 x_0, x_1 に対し、連続写像 $c : [0,1] \longrightarrow X$ で $c(0) = x_0$, $c(1) = x_1$ を満たすものが存在することである。

【問題 2.3】　位相空間 X が弧状連結ならば連結であることを示せ。

【問題 2.3 の解答】 X が弧状連結だが、連結ではないと仮定すると、$X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ となる空ではない開集合 U, V が存在する。$x_0 \in U$, $x_1 \in V$ に対し、弧状連結性から、連続写像 $c : [0,1] \longrightarrow X$ で $c(0) = x_0$, $c(1) = x_1$ を満たすものが存在する。$c^{-1}(U)$, $c^{-1}(V)$ は、区間 $[0,1]$ の空ではない開集合で、$[0,1] = c^{-1}(U) \cup c^{-1}(V)$, $c^{-1}(U) \cap c^{-1}(V) = \emptyset$ となる。一方、区間 $[0,1]$ が連結であることに矛盾する。

念のために区間 $[0,1]$ が連結であることも示そう。連結ではないとすると 0 を含む開集合 U があり、$[0,1] \setminus U$ が空ではない開集合となる。$W = \{a \in [0,1] \mid [0,a] \subset U\}$ を考えると、開集合の定義（各点のある ε 近傍を含む）から、W は 0 を含む開集合である。$m = \sup W$ をとると、$m \notin U$ である。実際、$m \in U$ ならば、ある $\varepsilon > 0$ に対して $m-\varepsilon, m+\varepsilon) \in U$ であり、$\left[0, m - \dfrac{\varepsilon}{2}\right] \subset U$ だから、$\left[0, m + \dfrac{\varepsilon}{2}\right] \subset U$, $m + \dfrac{\varepsilon}{2} \in W$ となり、m が上限であることに反する。この結果、$m \in [0,1] \setminus U$ となるが、$[0,1] \setminus U$ が空ではない開集合だから、ある $\varepsilon > 0$ に対して $(m-\varepsilon, m+\varepsilon) \in [0,1] \setminus U$ となり、$\left[0, m - \dfrac{\varepsilon}{2}\right] \subset U$ に反する。$[0,1]$ が連結でなく、$[0,1] \setminus U$ が空ではない開集合と仮定したことが矛盾の原因だから、$[0,1]$ が連結であることが示された。

注意 2.4 多様体は連結ならば弧状連結である。これは、局所弧状連結かつ連結ならば弧状連結であることから従う。もっと強いことも言えている [多様体入門　問題 6.5.4 参照]。

3　写像のホモトピー

弧状連結性を考えることは次に述べる写像のホモトピーを 1 点からなる集合 $\{p\}$ について考えることになっている。

定義 3.1 (ホモトピー) 位相空間 X, Y に対し、連続写像 $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ がホモトピックとは, 連続写像 $F : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ で、$f_0(x) = F(0,x)$, $f_1(x) = F(1,x)$ を満たすものが存在することである。f_0, f_1 がホモトピックであることを $f_0 \simeq f_1$ と表す。連続写像 F あるいは $f_t(x) = F(t,x)$ で定義される連続写像の族 f_t を f_0 と f_1 の間のホモトピーと呼ぶ。

位相空間 X, Y に対し、$\mathrm{Map}(X,Y)$ を X から Y への連続写像全体の集合とする。

$$\mathrm{Map}(X,Y) = \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ は連続写像}\}$$

集合 $\mathrm{Map}(X,Y)$ において、ホモトピックであること（$\simeq$）は同値関係となる。同値類をホモトピー類と呼び、ホモトピー類の集合 $\mathrm{Map}(X,Y)/\simeq$ を $[X,Y]$ と書き、ホモトピー集合と呼ぶ。

【問題 3.2】　連続写像 $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ がホモトピックのとき、連続写像 $h : W \longrightarrow X$, $g : Y \longrightarrow Z$ に対し、$g \circ f_0 \circ h$, $g \circ f_1 \circ h : W \longrightarrow Z$ はホモトピックであることを示せ。

【問題 3.2 の解答】 f_0, f_1 の間のホモトピー $F : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ に対し、$\overline{F} : [0,1] \times W \longrightarrow Z$ を $\overline{F}(t,w) = g(F(t,h(w)))$ で定義すると、$\overline{F}$ は連続写像で、$g \circ f_0 \circ h$ と $g \circ f_1 \circ h$ の間のホモトピーとなる。

【問題 3.3】　位相空間 X から Y への連続写像全体の集合 $\mathrm{Map}(X,Y)$ 上で $\simeq$ は同値関係となることを示せ。

注意 3.4　前述の問題を含め、今後、問題の解答、定理の証明で、様々な写像の構成を必要とする。このときに便利なのが、次の補題である。今後特に注意しないが、写像を部分閉集合上で両立するするように定義すれば、この補題によって構成した写像が連続となる。

補題 3.5 X, Y を位相空間とする。X が有限個の閉集合 $X_1, \ldots, X_k$ で被覆されているとし、X_i には、X の部分空間としての位相を考える：$X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$. 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が連続であることと、$i = 1, \ldots, k$ に対し、$f|X_i : X_i \longrightarrow Y$ が連続であることは同値である。

証明　X_i の位相の定義から、$f : X \longrightarrow Y$ が連続ならば、$f|X_i : X_i \longrightarrow Y$ は常に連続である。逆を考える。部分集合 $A \subset Y$ に対し、$X_i \cap f^{-1}(A) = (f|X_i)^{-1}(A)$ であり、$f^{-1}(A) = (\bigcup_{i=1}^{k} X_i) \cap f^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^{k}(X_i \cap f^{-1}(A)) = \bigcup_{i=1}^{k}(f|X_i)^{-1}(A)$ である。$f|X_i : X_i \longrightarrow Y$ が連続であるとすると、閉集合 $A \subset Y$ に対し、$(f|X_i)^{-1}(A)$ は X_i の閉集合であり、$X_i \subset X$ は閉集合だから、$(f|X_i)^{-1}(A)$ は X の閉集合である。従って、$f^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^{k}(f|X_i)^{-1}(A)$ は有限個の閉集合の和集合だから X の閉集合である。ゆえに f は連続である。 ■

【問題 3.3 の解答】 反射律 $f \simeq f$ は $f : X \longrightarrow Y$ に対し $F : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ を $F(t,x) = f(x)$ とおいて成立する。対称律 $f_0 \simeq f_1 \Longrightarrow f_1 \simeq f_0$ は $f_0 \simeq f_1$ を与えるホ

モトピー $F:[0,1]\times X\longrightarrow Y$ に対し、$F':[0,1]\times X\longrightarrow Y$ を $F'(t,x)=F(1-t,x)$ で定義すれば確かめられる。推移律 $f_0\simeq f_1,\ f_1\simeq f_2 \implies f_0\simeq f_2$ は、$f_0\simeq f_1$, $f_1\simeq f_2$ を与えるホモトピー $F_1:[0,1]\times X\longrightarrow Y$, $F_2:[0,1]\times X\longrightarrow Y$ に対し、$F:[0,1]\times X\longrightarrow Y$ を

$$F(t,x)=\begin{cases} F_1(2t,x) & 0\leqq t\leqq \dfrac{1}{2}\\ F_2(2t-1,x) & \dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1\end{cases}$$

により定義すれば確かめられる。

【問題 3.6】 任意の位相空間 X に対して, n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ への連続写像のホモトピー集合 $[X,\boldsymbol{R}^n]$ は１点集合となることを示せ。

【解】 任意の $f:X\longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ は $\mathbf{0}$ への定値写像 $c_{\mathbf{0}}$ とホモトピックである。実際、$F(t,x)=tf(x)$ とすればよい。

X が弧状連結であることは, $\{p\}$ を１点からなる位相空間として $[\{p\},X]$ が１点だけからなる集合であることを言っている。

【問題 3.7】 (1) 離散位相を持つ空でない有限集合 K についても、X が弧状連結であることと $[K,X]$ が１点だけからなる集合であることは同値となることを示せ。

(2) n 次元の立方体 I^n についても、X が弧状連結であることと $[I^n,X]$ が１点だけからなる集合であることは同値となることを示せ。

【問題 3.7 の解答】 (1) X が弧状連結ならば、任意の $f:K\longrightarrow X$ は X の１点 x_0 への定値写像 c_{x_0} にホモトピックである。従って、$[K,X]$ は１点集合である。X の２点 x_0, x_1 に対して、x_0 への定値写像 c_{x_0}, x_1 への定値写像 c_{x_1} を考えるとこれらがホモトピックであるから、$p\in K$ に対して、ホモトピー $F:[0,1]\times K\longrightarrow X$ の $[0,1]\times\{p\}$ への制限により、$F(0,p)=x_0$, $F(1,p)=x_1$ となる曲線が得られる。

(2) $f:I^n\longrightarrow X$ は $f(0,\dots,0)$ への定値写像 $c_{f(0,\dots,0)}$ とホモトピックである。実際、$F:[0,1]\times I^n\longrightarrow X$ を $F(t,x)=f(tx)$ で定義すればよい。X が弧状連結ならば、X の１点 x_0 への定値写像 c_{x_0} と $c_{f(0,\dots,0)}$ はホモトピックである。従って $[I^n,X]$ は１点集合である。逆に、X の２点 x_0, x_1 に対して、x_0 への定値写像 c_{x_0}, x_1 への定値写像 c_{x_1} の間のホモトピーを考えれば、それを $[0,1]\times\{p\}$ $(p\in I^n)$ に制限して、X が弧状連結であることがわかる。

2 点からなる集合は 0 次元の球面と考えられるが、n 次元 $(n\geqq 1)$ 球面 $S^n=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n+1}\mid \|\boldsymbol{x}\|=1\}$ に対して、$[S^n,X]$ は非常に面白い研究対象である。

定義 3.8 (n 連結) 位相空間 X は, $0\leqq m\leqq n$ に対して、$[S^m,X]$ が１点集合となるとき n 連結であると言われる。

問題 3.7 により、0 連結であることと弧状連結であることは同値である。例題 3.6 により、k 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^k$ は任意の n に対して n 連結である。

位相空間 X, Y に対して、様々な空間との間の写像のホモトピー集合を比べることにより、空間が区別できるかどうかを考えてみよう。例えば、１点集合 $\{p\}$ と、n 次元立方体は、そのままではホモトピー集合を使って区別することはできない。なぜなら、$[X,\{p\}]$ と $[X,I^n]$ はともに１点集合であるし、$[\{p\},X]$ と $[I^n,X]$ はともに弧状連結成分の個数の元を持つ集合である。次に定義する同じホモトピー型をもつ２つの空間は区別できないことが容易にわかる。

定義 3.9 (ホモトピー同値) 位相空間 X,Y に対して、連続写像 $f:X\longrightarrow Y$, $g:Y\longrightarrow X$ であって、$f\circ g\simeq \mathrm{id}_Y$, $g\circ f\simeq \mathrm{id}_X$ を満たすものがあるとき、

X と Y は同じホモトピー型を持つといい、$X \simeq Y$ と書く。X と Y はホモトピー同値 *(homotopy equivalent)* であるとも言う。f(または g) のことをホモトピー同値（写像）*(homotopy equivalence)* と呼び、このとき g(または f) を f(または g) のホモトピー逆写像と呼ぶ。

【例 3.10】 (1) 同相な位相空間 X, Y はホモトピー同値である。

(2) １点集合 $\{p\}$ と n 次元立方体、n 次元ユークリッド空間はホモトピー同値である。

(3) n 次元ユークリッド空間から原点 $\mathbf{0}$ を除いた空間 $\boldsymbol{R}^n \setminus \mathbf{0}$ と $n-1$ 次元球面 S^{n-1} はホモトピー同値である（$\boldsymbol{R}^n \setminus \mathbf{0}$ は直積 $\boldsymbol{R} \times S^{n-1}$ と同相であり、これからホモトピー同値であることも従う）。

定義 3.11 (可縮) １点からなる位相空間とホモトピー同値な空間は可縮な空間と呼ばれる。

定義 3.12 (星型) n 次元ユークリッド空間の部分集合 A が次の性質 $(*)$ を持つ A 内の点 $\boldsymbol{y}$ を持つとき、A は（$\boldsymbol{y}$ に対し）星型であるという。

$(*)$ 任意の $\boldsymbol{x} \in A$ に対し、線分 $\ell_{\boldsymbol{x}} = \{(1-t)\boldsymbol{y} + t\boldsymbol{x} \mid 0 \leqq t \leqq 1\}$ は A に含まれる。

n 次元ユークリッド空間の星型の部分空間 A は可縮である。実際、A が $\boldsymbol{y} \in A$ に対して星型として、$\boldsymbol{y} \in A$ への写像 $c_{\boldsymbol{y}} : \{p\} \longrightarrow A$, 写像 $c : A \longrightarrow \{p\}$ を考えると、$c \circ c_{\boldsymbol{y}} = \mathrm{id}_{\{p\}}$, $c_{\boldsymbol{y}} \circ c \simeq \mathrm{id}_A$ となる。ホモトピー $F : [0,1] \times A \longrightarrow A$ は、$F(t, \boldsymbol{x}) = (1-t)\boldsymbol{y} + t\boldsymbol{x}$ で与えられる。

【問題 3.13】 位相空間の間のホモトピー同値という関係 $\simeq$ は位相空間全体の上で同値関係であることを示せ。解答例は 5 ページ。

【問題 3.13 の解答】 反射律 $X \simeq X$ はホモトピー同値写像として恒等写像 id_X をとればすぐにわかる。対称律 $X \simeq Y \implies Y \simeq X$ も定義より明らかである。推移律 $X_0 \simeq X_1,\ X_1 \simeq X_2 \implies X_0 \simeq X_2$ は次のように示す。ホモトピー同値写像を $f_0 : X_0 \longrightarrow X_1,\ f_1 : X_1 \longrightarrow X_2$ とし、それぞれのホモトピー逆写像を $g_0 : X_1 \longrightarrow X_0,\ g_1 : X_2 \longrightarrow X_1$ とする。$f_0 \circ g_0 \simeq \mathrm{id}_{X_1},\ g_0 \circ f_0 \simeq \mathrm{id}_{X_0}$, $f_1 \circ g_1 \simeq \mathrm{id}_{X_2}$, $g_1 \circ f_1 \simeq \mathrm{id}_{X_1}$ が条件である。このとき、次のようにして $f_1 \circ f_0$ のホモトピー逆写像が $g_0 \circ g_1$ であることがわかり、推移律が成立する。

$$
\begin{aligned}
(f_1 \circ f_0) \circ (g_0 \circ g_1) &= f_1 \circ (f_0 \circ g_0) \circ g_1 \simeq f_1 \circ \mathrm{id}_{X_1} \circ g_1 = f_1 \circ g_1 \simeq \mathrm{id}_{X_2} \\
(g_0 \circ g_1) \circ (f_1 \circ f_0) &= g_0 \circ (g_1 \circ f_1) \circ f_0 \simeq g_0 \circ \mathrm{id}_{X_1} \circ f_0 = g_0 \circ f_0 \simeq \mathrm{id}_{X_0}
\end{aligned}
$$

ここで、問題 3.2 の結果を使っている。

ホモトピー同値な空間が同相ではないことを示すためには、$\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 2)$ に対しては、１点を除いた空間を考えることが有効であった。$\boldsymbol{R}^2$ とあるいは $\boldsymbol{R}^2$ の部分空間と他の空間が同相でないことを示すためには次のジョルダンの閉曲線定理が有効である。

定理 3.14 (ジョルダンの閉曲線定理) 平面上の単純閉曲線（円周の連続な単射による像）Γ の補集合は *2* つの弧状連結成分 U, V をもち、$\Gamma = \overline{U} \setminus U$, $\Gamma = \overline{V} \setminus V$ となる。

【問題 3.15】 ジョルダンの閉曲線定理 3.14 を用いて、$\boldsymbol{R}^2$ と $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 3)$ は同相ではないことを示せ。

【解】 $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 3)$ の中の円周 $C = \{(\cos\theta, \sin\theta, 0, \ldots, 0) \mid \theta \in \boldsymbol{R}\}$ の補集合は弧状連結である。実際、$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ について、$(x_3, \ldots, x_n) \neq$

$(0,\ldots,0)$ ならば $\gamma_{\boldsymbol{x}}(t)=t\boldsymbol{x}$ $(t\in[0,1])$ が $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{0}$ を結ぶ線分であり、$(x_3,\ldots,x_n)=(0,\ldots,0)$ ならば $\gamma_{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{cases}2t(1,0,\ldots,0) & (t\in[0,\frac{1}{2}])\\ (2t-1)\boldsymbol{x}+(2-2t)(1,0,\ldots,0) & (t\in[\frac{1}{2},1])\end{cases}$ が $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{0}$ を結ぶ区分線形曲線である。

もしも、$\boldsymbol{R}^2$ と $\boldsymbol{R}^n$ $(n\geqq 3)$ が同相であるとすると、同相写像 $h:\boldsymbol{R}^n\longrightarrow\boldsymbol{R}^2$ による C の像 $h(C)$ について、上に述べたことから $\boldsymbol{R}^2\setminus h(C)$ は弧状連結でなければならない。一方 $h(C)$ は $\boldsymbol{R}^2$ の単純閉曲線であり、ジョルダンの閉曲線定理 3.14 により、$\boldsymbol{R}^2\setminus h(C)$ は、弧状連結ではない。これは矛盾している。従って、$\boldsymbol{R}^2$ と $\boldsymbol{R}^n$ $(n\geqq 3)$ は同相ではない。

【問題 3.16】 (1) 開いたメビウスの帯、円周、開いたアニュラスはホモトピー同値であることを示せ。ここで、開いたメビウスの帯とは、

$$\{((2+r\cos\theta)\cos 2\theta,(2+r\cos\theta)\sin 2\theta,r\sin\theta)\mid r\in(-1,1),\ \theta\in\boldsymbol{R}\}\subset\boldsymbol{R}^3$$

と同相な位相空間であり、開いたアニュラスとは

$$\{(x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2\mid 1<{x_1}^2+{x_2}^2<4\}$$

と同相な位相空間である。

(2) ジョルダンの閉曲線定理を用いて, 開いたメビウスの帯と開いたアニュラスは同相ではないことを示せ。

【解】 (1) 円周 $S^1=\{(\cos\theta,\sin\theta)\in\boldsymbol{R}^2\mid\theta\in\boldsymbol{R}\}$ とし、円周から例題に書かれたメビウスの帯 M への写像を、$f:(\cos\theta,\sin\theta)\longmapsto(2\cos\theta,2\sin\theta,0)$, メビウスの帯から円周への写像を

$$g:((2+r\cos\theta)\cos 2\theta,(2+r\cos\theta)\sin 2\theta,r\sin\theta)\longmapsto(\cos 2\theta,\sin 2\theta)$$

で定義すると、$g\circ f=\mathrm{id}_{S^1}$,

$$(f\circ g)((2+r\cos\theta)\cos 2\theta,(2+r\cos\theta)\sin 2\theta,r\sin\theta)=(2\cos 2\theta,2\sin 2\theta,0)$$

であるが、$H:[0,1]\times M\longrightarrow M$ を

$$H(t,r,\theta)=\big((2+tr\cos\theta)\cos 2\theta,(2+tr\cos\theta)\sin 2\theta,tr\sin\theta)\big)$$

とすれば, $H(1,r,\theta)=\mathrm{id}_M$, $H(0,r,\theta)=f\circ g$ となる。従って，$S^1\simeq M$ である。

円周から例題に書かれたアニュラス A への写像を、包含写像 i とし、A から S^1 への写像を $p:(x_1,x_2)\longmapsto(\frac{x_1}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}},\frac{x_2}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}})$ とする。$p\circ i=\mathrm{id}_{S^1}$, $i\circ p(x_1,x_2)=(\frac{x_1}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}},\frac{x_2}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}})$ となる。$F(t,x_1,x_2)=(\frac{x_1}{(\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2})^t},\frac{x_2}{(\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2})^t})$ とすると、$F(0,x_1,x_2)=\mathrm{id}_A$, $F(1,x_1,x_2)=i\circ p$ となる。従って $S^1\simeq A$ である。

(2) A は平面 $\boldsymbol{R}^2$ の開部分集合であるから，円周からの A への連続な単射 c をとると、c の像は A を 2 つの弧状連結な開部分集合に分ける。実際，ジョルダンの閉曲線定理 3.14 により、c の像は平面 $\boldsymbol{R}^2$ を 2 つの弧状連結な開部分集合 U, V に分ける。$c(t)\in A$ の近傍は，U, V の両方に交わるので，$U\cap A$, $V\cap A$ の両方に交わる．$U\cap A$, $V\cap A$ はともに空ではない.

一方，メビウスの帯 M 上の閉曲線 $f(S^1)$ の補集合は

$$\{((2+r\cos\theta)\cos 2\theta,(2+r\cos\theta)\sin 2\theta,r\sin\theta)\mid r\in(0,1),\ \theta\in\boldsymbol{R}\}\subset\boldsymbol{R}^3$$

であり，$(0,1)\times \boldsymbol{R}/(2\pi\boldsymbol{Z})$ に同相で弧状連結である。

よって，A と M は同相ではない.

【問題 3.17】 (1) $\boldsymbol{R}^2-\{(-1,0),(1,0)\}$ と $S^1\times S^1-\{(0,0)\}$ は同じホモトピー型を持つことを示せ。ただし、$S^1=\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ という座標を用いている。(ヒント：ともに $S^1\vee S^1$ と同じホモトピー型を持つことを示せ。$S^1\vee S^1$ は2つの基点をもつ円周の基点を同一視して得られる空間である。)

(2) ジョルダンの閉曲線定理を用いて $\boldsymbol{R}^2-\{(-1,0),(1,0)\}$ と $S^1\times S^1-\{(0,0)\}$ は同相でないことを示せ。

【問題 3.17 の解答】 (1)$P=\boldsymbol{R}^2-\{(-1,0),(1,0)\}$ は $\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid (x\pm1)^2+y^2=1\}$ とホモトピー同値である。

また、$S^1\times S^1-\{(0,0)\}$ は $\{(x,y)\in S^1\times S^1 \mid x=\dfrac{1}{2}$ または $y=\dfrac{1}{2}\}$ とホモトピー同値。

$\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid (x\pm1)^2+y^2=1\}$ と $\{(x,y)\in S^1\times S^1 \mid x=\dfrac{1}{2}$ または $y=\dfrac{1}{2}\}$ は同相である。

(2) $P=\boldsymbol{R}^2-\{(-1,0),(1,0)\}$ は平面 $\boldsymbol{R}^2$ の開部分集合であるから，円周からの P への連続な単射 c をとると、c の像は P を 2 つの弧状連結な開部分集合に分ける。実際，ジョルダンの閉曲線定理 3.14 により、c の像は平面 $\boldsymbol{R}^2$ を 2 つの弧状連結な開部分集合 U, V に分ける。$c(t)\in P$ の近傍は，U, V の両方に交わるので，$U\cap P$, $V\cap P$ の両方に交わる．$U\cap P$, $V\cap P$ はともに空ではない.

一方，$S^1\times S^1$ 上の閉曲線 $S^1\times\{\dfrac{1}{2}\}$ は、$S^1\times S^1\setminus\{(0,0)\}$ 内の閉曲線であるが、$S^1\times S^1\setminus\{(0,0)\})\setminus S^1\times\{\dfrac{1}{2}\}\approx S^1\times(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})\setminus\{(0,0)\}$ は弧状連結である。

従って、$\boldsymbol{R}^2-\{(-1,0),(1,0)\}$ と $S^1\times S^1-\{(0,0)\}$ は同相でない。

平面 $\boldsymbol{R}^2$ の 1 点 $\mathbf{0}=(0,0)$ の補空間 $\boldsymbol{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$ および、2 点 $\{\mathbf{0},e_1\}$ $(e_1=(1,0))$ の補空間 $\boldsymbol{R}^2\setminus\{\mathbf{0},e_1\}$ について、円周 S^1 からの写像のホモトピー集合 $[S^1,\boldsymbol{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}]$, $[S^1,\boldsymbol{R}^2\setminus\{\mathbf{0},e_1\}]$ を考えるとこれらはともに可算無限集合になることがわかる。この 2 つの空間は、ホモトピー同値ではないことを後で示すが、そのために、写像のホモトピー集合に対して、群構造を導入することを考える。円周 S^1 からの 2 つの写像に対して円周 S^1 からの写像を与える演算を考える必要があるが、そのままでは難しいので、基点付きの空間の間の写像、空間対間の写像を考える。

定義 3.18 (空間対，基点付き空間) 位相空間 X とその部分空間 A の対 (X,A) を空間対と呼ぶ。A が 1 点 $b\in X$ からなるとき、$(X,\{b\})$ を (X,b) と書き、基点付きの空間と呼ぶ。

定義 3.19 (空間対の間の写像，そのホモトピー) 空間対 (X,A), (Y,B) に対して、連続写像 $f:X\longrightarrow Y$ が $f(A)\subset B$ を満たすとき、f を空間対 (X,A), (Y,B) の間の連続写像と呼び、$f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ と書く。空間対の間の連続写像 $f_0,\ f_1:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ がホモトピックとは連続写像 $f_0,\ f_1$ の間のホモトピー $F:[0,1]\times X\longrightarrow Y$ で $F([0,1]\times A)\subset B$ を満たすものが存在することである。$f_t(x)=F(t,x)$ で定義されるホモトピーは $f_t(A)\subset B$ を満たしている。空間対の間の連続写像 f_0 と f_1 がホモトピックであることも $f_0\simeq f_1$ と書く。

上のホモトピー $F:[0,1]\times X\longrightarrow Y$ は、$[0,1]\times(X,A)=([0,1]\times X,[0,1]\times A)$ と考えて、$F:[0,1]\times(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ のように書かれる。

$\mathrm{Map}((X,A),(Y,B))$ を空間対 (X,A), (Y,B) の間の連続写像全体のなす集合とすると、$\simeq$ は $\mathrm{Map}((X,A),(Y,B))$ 上の同値関係となる。その同値類をホモトピー類と呼び、同値類の集合 $\mathrm{Map}((X,A),(Y,B))/\simeq$ をホモトピー集合と呼び、$[(X,A),(Y,B)]$ と書く。

注意 3.20　一般に $x \in A$ に対して $f_t(x) = f_0(x)$ を満たすホモトピーを A についての相対ホモトピーと呼び、このようなホモトピーが存在するとき、$f_0 \simeq f_1$ rel. A と書く。ホモトピー群を定義するときなどには空間対 (X, A) から基点付きの空間 (Y, b_Y) への写像を考えるが、このときのホモトピーは $f_t(A) = b_Y$ を満たしている。このときのホモトピーは、A についての相対ホモトピーであり、$f_0 \simeq f_1$ rel. A のように書くことも多い。

4　ホモトピー群

4.1　ホモトピー群の定義

閉区間 $[0,1]$ を I で表す。n 次元立方体 $I^n = \overbrace{I \times \cdots \times I}^{n} = [0,1]^n$ の内部は開区間 $(0,1)$ の直積 $(0,1)^n$ であり、I^n の境界は $\partial I^n = [0,1]^n \setminus (0,1)^n$ である。

基点付きの位相空間 (X, b_X) に対し、空間対 $(I^n, \partial I^n)$ からの連続写像の全体 $\mathrm{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ を考える。

$f_1,\ f_2 \in \mathrm{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ に対し、連続写像 $f_1 \natural f_2 : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$ を次で定義する。

$$(f_1 \natural f_2)(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} f_1(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & (t_1 \in [0, \frac{1}{2}]) \\ f_2(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & (t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]) \end{cases}$$

空間対の写像のホモトピー類の集合 $[(I^n, \partial I^n), (X, b_X)]$ を $\pi_n(X, b_X)$ と書く。$\pi_n(X, b_X) = [(I^n, \partial I^n), (X, b_X)]$ の元の演算 $(\alpha_1, \alpha_2) \longmapsto \alpha_1\alpha_2$ を $\alpha_1 = [f_1]$, $\alpha_2 = [f_2]$ となる $f_1,\ f_2$ を使って、$\alpha_1\alpha_2 = [f_1 \natural f_2]$ で定義する。

次の問題 4.2 で確かめるように、$\pi_n(X, b_X)$ は、上の演算に関して群になる。

定義 4.1 基点付きの位相空間 (X, b_X) に対し、$\pi_n(X, b_X) = [(I^n, \partial I^n), (X, b_X)]$ に $\natural$ から誘導される演算を考えたものを (X, b_X) の n 次ホモトピー群と呼ぶ。1 次ホモトピー群は基本群とも呼ばれる。

【問題 4.2】　(1) 上の演算が「適切に定義されている」(well defined) とはどういうことか。また演算が定義できていることを確かめよ。

(2) この演算について、結合律が成り立つことを示せ。

(3) b_X への定値写像を c_{b_X} とする。c_{b_X} のホモトピー類 $[c_{b_X}]$ が上の演算の単位元であることを示せ。

(4) $f \in \mathrm{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ に対し、$\overline{f}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(1-t_1, t_2, \ldots, t_n)$ とおくと、上の演算について、ホモトピー類 $[f]$ の逆元がホモトピー類 $[\overline{f}]$ で与えられることを示せ。

【問題 4.2 の解答】 (1) $f_1 \simeq f_1'$, $f_2 \simeq f_2'$ に対して $f_1 \natural f_2 \simeq f_1' \natural f_2'$ となること。

$f_1 \simeq f_1'$, $f_2 \simeq f_2'$ を与えるホモトピーを $F_1 : [0,1] \times (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$, $F_2 : [0,1] \times (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$ とするとき、$F_1 \natural F_2 : [0,1] \times (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$ を

$$(F_1 \natural F_2)(s, t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} F_1(s, 2t_1, t_2, \ldots, t_n) & (t_1 \in [0, \frac{1}{2}]) \\ F_2(s, 2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & (t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]) \end{cases}$$

とおけば、$f_1 \natural f_2 \simeq f_1' \natural f_2'$ をあたえるホモトピーとなる。

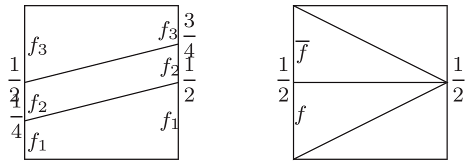


図 1: ホモトピー群の演算

(2) $(f_1\natural f_2)\natural f_3 \simeq f_1\natural(f_2\natural f_3)$ であることを示す。t_1 方向への定義域を勘案して、$(f_1\natural f_2)\natural f_3$ を図 4.2 の左の辺、$f_1\natural(f_2\natural f_3)$ を図 4.2 の右の辺に対応するようにするとよい。

$$((f_1\natural f_2)\natural f_3)(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \begin{cases} f_1(4t_1,t_2,\ldots,t_n) & (t_1 \in [0,\frac{1}{4}]) \\ f_2(4t_1-1,t_2,\ldots,t_n) & (t_1 \in [\frac{1}{4},\frac{1}{2}]) \\ f_3(2t_1-1,t_2,\ldots,t_n) & (t_1 \in [\frac{1}{2},1]) \end{cases}$$

$$(f_1\natural(f_2\natural f_3))(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \begin{cases} f_1(2t_1,t_2,\ldots,t_n) & (t_1 \in [0,\frac{1}{2}]) \\ f_2(4t_1-2,t_2,\ldots,t_n) & (t_1 \in [\frac{1}{2},\frac{3}{4}]) \\ f_3(4t_1-3,t_2,\ldots,t_n) & (t_1 \in [\frac{3}{4},1]) \end{cases}$$

の間のホモトピー $F(s,t_1,t_2,\ldots,t_n)$ $(s\in[0,1])$ を

$$F(s,t_1,t_2,\ldots,t_n) = \begin{cases} f_1(\frac{4t_1}{1+s},t_2,\ldots,t_n) & (t_1 \in [0,\frac{1+s}{4}]) \\ f_2(s+4t_1-2,t_2,\ldots,t_n) & (t_1 \in [\frac{1+s}{4},\frac{2+s}{4}]) \\ f_3(1-\frac{4(1-t_1)}{2-s},t_2,\ldots,t_n) & (t_1 \in [\frac{2+s}{4},1]) \end{cases}$$

とすればよい。

(3) $f \simeq f\natural c_{b_X}$ を示す。$f \simeq c_{b_X}\natural f$ も同様である。

$$(f\natural c_{b_X})(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \begin{cases} f(2t_1,t_2,\ldots,t_n) & (t_1 \in [0,\frac{1}{2}]) \\ b_X & (t_1 \in [\frac{1}{2},1]) \end{cases}$$

だから、$s\in[0,1]$ に対し、

$$F(s,t_1,t_2,\ldots,t_n) = \begin{cases} f((1+s)t_1,t_2,\ldots,t_n) & (t_1 \in [0,\frac{1}{1+s}]) \\ b_X & (t_1 \in [\frac{1}{1+s},1]) \end{cases}$$

とすればよい。

$$(c_{b_X}\natural f)(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \begin{cases} b_X & (t_1 \in [0,\frac{1}{2}]) \\ f(2t_1,t_2,\ldots,t_n) & (t_1 \in [\frac{1}{2},1]) \end{cases}$$

だから、

$$F(s,t_1,t_2,\ldots,t_n) = \begin{cases} b_X & (t_1 \in [0,1-\frac{1}{1+s}]) \\ f(1-(1+s)(1-t_1),t_2,\ldots,t_n) & (t_1 \in [1-\frac{1}{1+s},1]) \end{cases}$$

(4) $f\natural\overline{f} \simeq c_{b_X}$ を示す。$\overline{f}\natural f \simeq \overline{f} \simeq c_{b_X}$ も同様である。

$$(f\natural\overline{f})(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \begin{cases} f(2t_1,t_2,\ldots,t_n) & (t_1 \in [0,\frac{1}{2}]) \\ f(2-2t_1,t_2,\ldots,t_n) & (t_1 \in [\frac{1}{2},1]) \end{cases}$$

$$F(s,t_1,t_2,\dots,t_n)=\begin{cases} b_X & (t_1\in[0,\frac{s}{2}]) \\ f(2t_1-s,t_2,\dots,t_n) & (t_1\in[\frac{s}{2},\frac{1}{2}]) \\ f(2-2t_1-s,t_2,\dots,t_n) & (t_1\in[\frac{1}{2},1-\frac{s}{2}]) \\ b_X & (t_1\in[1-\frac{s}{2},1]) \end{cases}$$

【問題 4.3】 次を示せ。

(1) 基点付き位相空間の間の連続写像 $f:(X,b_X)\longrightarrow(Y,b_Y)$ に対して、$\alpha\in\mathrm{Map}((I^n,\partial I^n),(X,b_X))$ に $f\circ\alpha\in\mathrm{Map}((I^n,\partial I^n),(Y,b_Y))$ を対応させる写像は、群の準同型 $f_*:\pi_n(X,b_X)\longrightarrow\pi_n(Y,b_Y)$ を誘導することを示せ。

(2) 連続写像 $f:(X,b_X)\longrightarrow(Y,b_Y)$, $g:(Y,b_Y)\longrightarrow(Z,b_Z)$ に対して、群の準同型として $g_*f_*=(g\circ f)_*:\pi_n(X,b_X)\longrightarrow\pi_n(Z,b_Z)$ であることを示せ。

【解】 (1) まず、f_* が写像になることは、$\alpha_0\simeq\alpha_1:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,b_X)$ がホモトピックな写像のときそのホモトピーを $H:[0,1]\times(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,b_X)$ とすると、$f\circ H$ が $f\circ\alpha_0\simeq f\circ\alpha_1$ を与えることからわかる。

また、$\alpha,\ \beta:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,b_X)$ に対し、$f\circ(\alpha\natural\beta)=(f\circ\alpha)\natural(f\natural\beta)$, $f\circ\overline{\alpha}=\overline{f\circ\alpha}$ であるから、$f_*([\alpha][\beta])=f_*(\alpha)f_*(\beta)$、$f_*([\alpha]^{-1})=(f_*(\alpha))^{-1}$ であり、準同形となる。

(2) $\alpha:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,b_X)$ に対し、$(g\circ f)_*([\alpha])=[(g\circ f)\circ\alpha]=[g\circ(f\circ\alpha)]=g_*([f\circ\alpha])=g_*(f_*([\alpha]))=(g_*\circ f_*)([\alpha])$

【問題 4.4】 基点を保つ連続写像 $f_0,\ f_1:(X,b_X)\longrightarrow(Y,b_Y)$ が（基点を保って）ホモトピックとすると、$(f_0)_*=(f_1)_*:\pi_n(X,b_X)\longrightarrow\pi_n(Y,b_Y)$ である。

【解】 $f_0\simeq f_1:(X,b_X)\longrightarrow(Y,b_Y)$ を与えるホモトピーを $F:[0,1]\times(X,b_X)\longrightarrow(Y,b_Y)$ とすると、$\alpha:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,b_X)$ に対し、$F\circ\alpha$ は、$f_0\circ\alpha,\ f_1\circ\alpha:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,b_X)$ の間のホモトピーとなる。従って、$(f_0)_*([\alpha])=(f_1)_*([\alpha])$ が任意の $[\alpha]\in\pi_n(X,b_X)$ に対していえる。よって、$(f_0)_*=(f_1)_*$.

【問題 4.5】 $(X,b_X),\ (Y,b_Y)$ を弧状連結な基点付き空間とする。$\pi_n(X\times Y,(b_X,b_Y))\cong\pi_n(X,b_X)\times\pi_n(Y,b_Y)$ を示せ。

【問題 4.5 の解答】 $\mathrm{pr}_X:X\times Y\longrightarrow X,\ \mathrm{pr}_Y:X\times Y\longrightarrow Y$ を射影とする。$f:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X\times Y,(b_X,b_Y)$ に対して, $f_X=\mathrm{pr}_X\circ f:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,b_X)$, $f_Y=\mathrm{pr}_Y\circ f:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(Y,b_Y)$ が得られる。これは準同型 $((\mathrm{pr}_X)_*,(\mathrm{pr}_Y)_*):\pi_n(X\times Y,(b_X,b_Y))\cong\pi_n(X,b_X)\times\pi_n(Y,b_Y)$ を誘導する。

この準同型は全射である。実際、$[g]\in\pi_n(X,b_X),\ [h]\in\pi_n(X,b_X)$ に対して、$(g,h):(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X\times Y,(b_X,b_Y)$ が得られ、$\mathrm{pr}_X\circ(g,h)=g,\ \mathrm{pr}_Y\circ(g,h)=h$ を満たす。

この準同型は単射である。実際、$f_X\simeq c_{b_X}$ を与えるホモトピーを $F_X:[0,1]\times(I^n,\partial I^n)\longrightarrow X,\ f_Y\simeq c_{b_Y}$ を与えるホモトピーを $F_Y:[0,1]\times(I^n,\partial I^n)\longrightarrow Y$ とすると、$F=(F_X,F_Y):[0,1]\times(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,Y)$ が、$f\simeq c_{(b_X,b_Y)}$ を与えるホモトピーとなる。

【問題 4.6】 $n\geqq 2$ に対して、$\pi_n(X,b_X)$ は可換群であることを示せ。
ヒント：$f:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,b_X)$, $a\in(0,1)$ に対し、

$$f_a(t_1,\dots,t_n)=\begin{cases} f(\dfrac{t_1-\frac{1}{2}}{a}+\dfrac{1}{2},\dots,\dfrac{t_n-\frac{1}{2}}{a}+\dfrac{1}{2}) & (\forall i,\ |t_i-\frac{1}{2}|\leqq\frac{a}{2}) \\ b_X & (\exists i,\ |t_i-\frac{1}{2}|\geqq\frac{a}{2}) \end{cases}$$

を考える。f_a は $f_1 = f$ とホモトピックで、立方体 I^n の中央の１辺 a の立方体の外の点は、b_X に写している。これを使って、$f\natural g$ と $g\natural f$ がホモトピックであることを示す。図参照。

【問題 4.6 の解答】 作業中

問題 4.6 により、$n \geqq 2$ に対して、$\pi_n(X, b_X)$ は可換群であることはわかるが、その計算は n が大きいときに非常に難しい。$n \geqq 2$ に対して球面 S^n に対して、$\pi_m(S^n, b_{S^n}) = 0$ $(1 \leqq m \leqq n-1)$, $\pi_n(S^n, b_{S^n}) = \boldsymbol{Z}$ は後で説明するが、$\pi_m(S^n, b_{S^n})$ 　$(m > n)$ は多くの m に対して 0 ではなく、完全には決定されていない。

4.2 ホモトピー群の関手性

明らかに, 恒等写像 $\mathrm{id}_X : (X, b_X) \longrightarrow (X, b_X)$ に対しては、$(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_n(X,b_X)}$ である。これと、問題 4.3 でみた性質は、n 次ホモトピー群が基点付き位相空間の同相類の不変量となることを意味している。

もう一度まとめると、基点付き位相空間の n 次ホモトピー群は、基点付き位相空間の間の連続写像について次の性質を持つ。

- 基点付き位相空間の間の連続写像 $f : (X, b_X) \longrightarrow (Y, b_Y)$ は群の準同型 $f_* : \pi_n(X, b_X) \longrightarrow \pi_n(Y, b_Y)$ を誘導する。
- 恒等写像 $\mathrm{id}_X : (X, b_X) \longrightarrow (X, b_X)$ に対しては、$(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_n(X,b_X)}$ である。
- 連続写像 $f : (X, b_X) \longrightarrow (Y, b_Y)$, $g : (Y, b_Y) \longrightarrow (Z, b_Z)$ に対して、群の準同型として $g_* f_* = (g \circ f)_* : \pi_n(X, b_X) \longrightarrow \pi_n(Z, b_Z)$ である。

この性質を、n 次ホモトピー群をとる操作は、(基点付き位相空間, （基点を保つ）連続写像) のなす圏（カテゴリー）から (群, 準同型写像) のなす圏への共変関手（コバリアント・ファンクター）であるという。基点付きの位相空間が (X, b_X), (Y, b_Y) が同相ならば、それらの n 次ホモトピー群 $\pi_n(X, b_X)$, $\pi_n(Y, b_Y)$ は同型である。従って、$\pi_n(X, b_X)$ の同型類が、基点付き位相空間の同相類の不変量となる。

基点付き位相空間の間の連続写像が、n 次ホモトピー群の間に誘導する準同形については、もう 1 つ重要な性質がある。それは問題 4.4 で確かめたホモトピー不変性と呼ばれる性質である。

- 基点を保つ連続写像 f_0, $f_1 : (X, b_X) \longrightarrow (Y, b_Y)$ が（基点を保って）ホモトピックとすると、$(f_0)_* = (f_1)_* : \pi_n(X, b_X) \longrightarrow \pi_n(Y, b_Y)$ である。

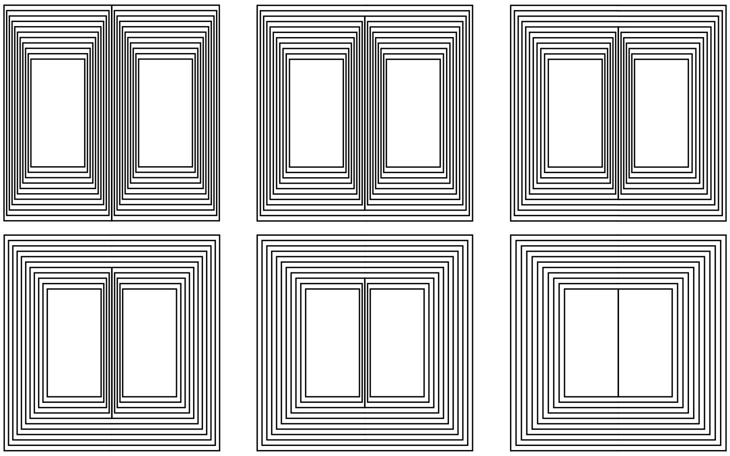
従って、n 次ホモトピー群は基点を保つホモトピー型の不変量である。

さらに、X が弧状連結な位相空間であれば、$\pi_n(X, b_X)$ の同型類は基点 b_X の取り方によらないことがわかる。

【問題 4.7】 弧状連結な位相空間 X に対し、$\pi_n(X, b_X)$ の同形類は、基点 b_X のとりかたによらないことを示せ。

【問題 4.7 の解答】 $b'_X \in X$ に対して、b_X, b'_X を結ぶ曲線 γ $(\gamma(0) = b_X, \gamma(1) = b'_X)$ をとる。$\widehat{\gamma}(t_1, \dots, t_n) = \gamma(t_1)$ と置く。$\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_n) \in I^n$ に対し、$\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n) = \min\{|t_1|, |1-t_1|, \dots, |t_n|, |1-t_n|\}$ と置く。$f \in \mathrm{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ に対し、$\overline{\gamma}_\# f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b'_X)$ を次で定義する。

$$\overline{\gamma}_\# f = \begin{cases} \gamma(1 - 4\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n)) & (4\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n) \leqq 1) \\ f(\dfrac{1}{2} + 2(t_1 - \dfrac{1}{2}), \dots, \dfrac{1}{2} + 2(t_n - \dfrac{1}{2})) & (4\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n) \geqq 1) \end{cases}$$



同様に $g \in \mathrm{Map}((I^n,\partial I^n),(X,b'_X))$ に対し、$\gamma_\# g : (I^n,\partial I^n) \longrightarrow (X,b_X)$ を次で定義する。

$$\gamma_\# g = \begin{cases} \gamma(4\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{t},\partial I^n)) & (4\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{t},\partial I^n) \leqq 1) \\ g(\frac{1}{2}+2(t_1-\frac{1}{2}),\dots,\frac{1}{2}+2(t_n-\frac{1}{2})) & (4\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{t},\partial I^n)\geqq 1)\end{cases}$$

$\overline{\gamma}_\#$ は準同形写像 $\overline{\gamma}_*:\pi_n(X,b_X)\longrightarrow \pi_n(X,b'_X)$ を誘導する。すなわち、$\overline{\gamma}_\#(\overline{f}) = \overline{\overline{\gamma}_\#(f)}$、$\overline{\gamma}_\#(f_1)\natural\overline{\gamma}_\#(f_2)\simeq\overline{\gamma}_\#(f_1\natural f_2)$ が成立する。

定義から $\overline{\overline{\gamma}_\#(f)} = \overline{\gamma}_\#\overline{f}$ である。

$f_1,f_2:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,b_X)$ に対して、$\overline{\gamma}_\#(f_1\natural f_2), (\overline{\gamma}_\# f_1)\natural(\overline{\gamma}_\# f_1) : (I^n,\partial I^n)\longrightarrow (X,b'_X)$ は、ホモトピックであり、その間のホモトピーは、

$$\begin{aligned}&F(s,t_1,t_2,\dots,t_n)\\ &=\begin{cases} f_1(\frac{1}{4}+\frac{s}{8}+4(t_1-\frac{1}{2}),\frac{1}{2}+2(t_2-\frac{1}{2}),\dots,\frac{1}{2}+2(t_n-\frac{1}{2})) & \boldsymbol{t}\in[\frac{1}{8}+\frac{s}{8},\frac{3}{8}+\frac{s}{8}]\times[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]^{n-1} \\ f_2(\frac{3}{4}-\frac{s}{8}+4(t_1-\frac{1}{2}),\frac{1}{2}+2(t_2-\frac{1}{2}),\dots,\frac{1}{2}+2(t_n-\frac{1}{2})) & \boldsymbol{t}\in[\frac{5}{8}-\frac{s}{8},\frac{7}{8}-\frac{s}{8}]\times[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]^{n-1} \\ \gamma(a(s,\boldsymbol{t})) & \boldsymbol{t}\text{が上の直方体に含まれない}\end{cases}\end{aligned}$$

ここで、

$$a(s,\boldsymbol{t}) = 1-\min\{\frac{|t_1|}{\frac{1}{8}+\frac{1-s}{8}},\frac{|1-t_1|}{\frac{1}{8}+\frac{1-s}{8}},\frac{|t_1-\frac{1}{2}|}{\frac{1}{8}}+1-s,4|t_2|,4|1-t_2|,\dots,4|t_n|,4|1-t_n|\}$$

である。このホモトピーを図示したものが下の図である。

従って、$\overline{\gamma}_*:\pi_n(X,b_X)\longrightarrow\pi_n(X,b'_X)$ が誘導される。

同様に $\gamma_\#$ は準同形写像 $\gamma_*:\pi_n(X,b'_X)\longrightarrow\pi_n(X,b_X)$ を誘導する。

$\gamma_\#\overline{\gamma}_\# f$ が f とホモトピックであることは、次のホモトピーによりわかる。

$$F(s,\boldsymbol{t}) = \begin{cases} \gamma(4\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{t},\partial I^n)) & (\mathrm{dist}(\boldsymbol{t},\partial I^n)\leqq\frac{1-s}{4}) \\ \gamma(3(1-s)-8\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{t},\partial I^n)) & (\frac{1-s}{4}\leqq\mathrm{dist}(\boldsymbol{t},\partial I^n)\leqq\frac{3(1-s)}{8}) \\ f(\frac{1}{2}+(4-3s)(t_1-\frac{1}{2}),\dots,\frac{1}{2}+(4-3s)(t_1-\frac{1}{2})) & (\mathrm{dist}(\boldsymbol{t},\partial I^n)\geqq\frac{3(1-s)}{8})\end{cases}$$

【問題 4.8】 弧状連結な位相空間 X に対し、$\pi_1(X,b_X)$ の共役類の集合 C からホモトピー集合 $[S^1,X]$ への写像を自然に定めるとこれは全単射であることを示せ。

【問題 4.8 の解答】

$\alpha : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (X,b_X)$ に対して、$S^1=\{e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}\in\boldsymbol{C}\}$ からの写像 $C(\alpha)(e^{2\pi\sqrt{-1}\theta})=\alpha(\theta)$ を対応させる。まず、この写像が適切に定義されているのは、$[\beta][\alpha][\beta]^{-1}\in\pi_1(X,b_X)$ は, $(\beta\natural\alpha)\natural\overline{\beta}$ のホモトピー類として定義されるが、$\beta_s(t)=\beta(s+(1-s)t)$ と置くと、$C((\beta_s\natural\alpha)\natural\overline{\beta_s})$ は、基点を考えない円周からの写像$C((\beta\natural\alpha)\natural\overline{\beta})$ と $C((\beta_1\natural\alpha)\natural\overline{\beta_1})$ の間のホモトピーとなる。$(\beta_1\natural\alpha)\natural\overline{\beta_1}=(c_{b_X}\natural\alpha)\natural c_{b_X}\simeq\alpha$ だから、$C((\beta\natural\alpha)\natural\overline{\beta})\simeq C(\alpha):S^1\longrightarrow X$ である。

全射であることは、$f : S^1 \longrightarrow X$ に対し、b_X と $f(1)$ を結ぶ曲線 $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ ($\gamma(0) = b_X, \gamma(1) = f(1)$ をとる。$B(f)(t) = f(e^{2\pi\sqrt{-1}t})$ とおき、$(\gamma\natural B(f))\natural\overline{\gamma}$ を考えると、$[(\gamma\natural B(f))\natural\overline{\gamma}] \in \pi_1(X, b_X)$ で、上の議論と同様に $C((\gamma\natural B(f))\natural\overline{\gamma}) \simeq f$ となる。

単射であること。$\alpha,\ \beta : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (X, b_X)$ に対して、$C(\alpha) \simeq C(\beta) : S^1 \longrightarrow X$ とする。$F : [0,1]\times S^1 \longrightarrow X$ を $C(\alpha), C(\beta)$ の間のホモトピー ($C(\alpha)(e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}) = F(0, e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}),\ C(\beta)(e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}) = F(1, e^{2\pi\sqrt{-1}\theta})$) とする。$\gamma(t) : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (X, b_X)$ を $\gamma(t) = F(t,1)$ で定義する。$G : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow [0,1]\times S^1 \longrightarrow X$ を $G(t,\theta) = (t, e^{2\pi\sqrt{-1}\theta})$ として、$\alpha(t) = (F\circ G)(0,t),\ \beta(t) = (F\circ G)(1,t),\ \gamma(t) = (F\circ G)(t,0), \overline{\gamma}(t) = (F\circ G)(1-t,1)$ である。$(\gamma\natural\beta)\natural\overline{\gamma} \simeq \alpha : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (X, b_X)$ だから、α, β は $\pi_1(X, b_X)$ において共役である。

【問題 4.9】 n 次元立方体 I^n から m 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 U への連続写像 $f : I^n \longrightarrow U$ を考える。この f に対し、ある実数 ε が存在し、$g : I^n \longrightarrow U$ が $\displaystyle\sup_{t\in I^n} \|g(t) - f(t)\| < \varepsilon$ を満たす連続写像ならば、$s \in [0,1]$ に対し、$(1-s)g(t) + sf(t) \in U$ となることを示せ。

【問題 4.9 の解答】 作業中

4.3 n 連結性

【問題 4.10】 集合として $\pi_n(X, b_X) = [(S^n, b_{S^n}), (X, b_X)]$ を示せ。

【問題 4.11】 k を 2 以上の自然数とする。$S^{k-1} = \{x \in \boldsymbol{R}^k \mid \|x\| = 1\}$, $D^k = \{x \in \boldsymbol{R}^k \mid \|x\| \leqq 1\}$ とする。弧状連結な空間 X とその上の点 b_X を考える。「$\pi_{k-1}(X, b_X)$ が単位群であること」と「任意の写像 $f : S^{k-1} \longrightarrow X$ に対し、$g : D^k \longrightarrow X$ で $g|\partial D^k = f$ を満たすものが存在すること」は同値であることを示せ。

【問題 4.11 の解答】 $D^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1})\boldsymbol{R}^{n+1} \mid {x_1}^2 + \cdots + {x_{n+1}}^2 \leqq 1\}$, $S^n = \partial D^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1})\boldsymbol{R}^{n+1} \mid {x_1}^2 + \cdots + {x_{n+1}}^2 = 1\}$ とする。

まず、連続写像 $\varphi : [0,1]\times I^n \longrightarrow D^{n+1}$ で $\varphi(\partial([0,1]\times I^n)) = S^n$, $\varphi([0,1]\times\partial I^n \cup \{1\}\times I^n) = b \in S^n$, $\varphi|[0,1)\times(0,1)^n$ は $D^{n+1}\setminus\{b\}$ への同相写像であるようなものを作る。

$[0,1]\times I^n$ と $[-1,1]\times[-1,1]^n$ は座標方向を保つ相似変換で同相だから、$[-1,1]\times[-1,1]^n$ について、φ に対応する ϕ を構成する。

そのためには、まず同相写像 $\psi : [-1,1]\times[-1,1]^n \longrightarrow [-1,1]\times[-1,1]^n$ で、$\varphi([-1,1]\times\partial[-1,1]^n \cup \{1\}\times[-1,1]^n) = \{1\}\times[-1,1]^n$ となるものを次のように作る。$(2,0,\dots,0)$ から出る半直線 ℓ が、$[-1,1]\times[-1,1]^n$ と $\boldsymbol{t}_0^\ell$, $\boldsymbol{t}_1^\ell$ を端点とする線分で交わるとき、$\psi_1((1-u)\boldsymbol{t}_0^\ell + u\boldsymbol{t}_1^\ell) = u\boldsymbol{t}_0^\ell + (1-u)\boldsymbol{t}_1^\ell$ とする。ψ_1 は各線分の両端を入れ替える写像である。さらに、$\psi(s, t_1, \dots, t_n) = \psi_1(-s, t_1, \dots, t_n)$ とする。

次に $\pi : [-1,1]\times[-1,1]^n \longrightarrow D^{n+1}$ を $\boldsymbol{b} = (1,0,\dots,0)$ から出る半直線 m が、$[-1,1]\times[-1,1]^n$ と $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{t}^m$ を端点とする線分で交わり、D^{n+1} と $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}^m$ を端点とする線分で（この順に）交わるとき、$\pi((1-u)\boldsymbol{b} + u\boldsymbol{t}^m) = (1-u)\boldsymbol{b} + u\boldsymbol{x}^m$ とする。そうすると、$\pi(\{1\}\times[-1,1]^n) = (1,0,\dots,0)$ として、π は $[-1,1)\times[-1,1]^n$ で同相であるような連続写像となる。

$\phi = \pi\circ\psi$ が求める写像である。

こうして、連続写像 $\varphi : [0,1]\times I^n \longrightarrow D^{n+1}$ で $\varphi(\partial([0,1]\times I^n)) = S^n$, $\varphi([0,1]\times\partial I^n \cup \{1\}\times I^n) = b \in S^n$, $\varphi|[0,1)\times(0,1)^n$ は $D^{n+1}\setminus\{b\}$ への同相写像であるようなものができた。

この連続写像 $\varphi : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (S^n, b_{S^n})$ について、開集合 U の逆像 $\varphi^{-1}(U)$ が開集合であることは連続性そのものだが、ある集合 W の逆像 $\varphi^{-1}(W)$ が開集合ならば、W は開集合であることがわかる。$b \in W$ のとき、$\varphi^{-1}(W)$ が開集合ならば、$[-1,1]\times[-1,1]^n \setminus \varphi^{-1}(W) \subset [-1,1]\times[-1,1]^n \setminus \varphi^{-1}(b)$ は閉集合で、$\varphi|([-1,1]\times[-1,1]^n\setminus\varphi^{-1}(b))$ は $D^{n+1}\setminus\{b\}$ への同相写像だから、$\varphi([-1,1]\times[-1,1]^n\setminus\varphi^{-1}(W)) = D^{n+1}\setminus W$ は閉集合。従って W は開集合である。

位相空間 X への連続写像 $G : [0,1]\times I^n \longrightarrow X$ が、$\varphi([0,1]\times\partial I^n \cup \{1\}\times I^n)$ を 1 点に写せば、連続写像 $G : D^{n+1} \longrightarrow X$ で、$G = g\circ\varphi$ となるものが（一意

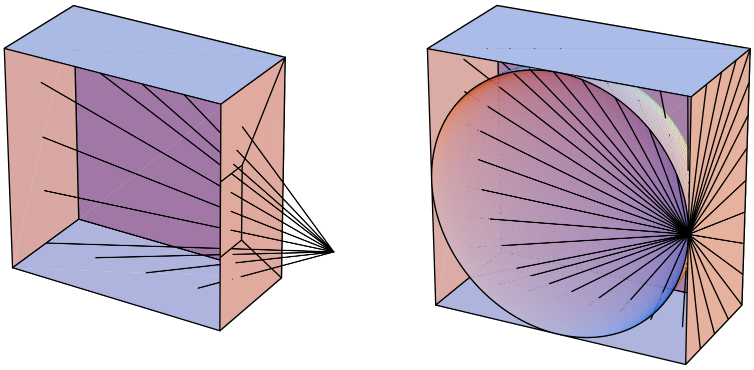


図 2: $[-1,1]\times[-1,1]^2$ の点と $(2,0,0)$, $(1,0,0)$ を結ぶ直線。

に）ある。$F : I^n \longrightarrow X$ が ∂I^n を 1 点に写せば、連続写像 $f : S^n \longrightarrow X$ で、$F = f\circ(\varphi|\{0\}\times I^n)$ となるものが存在する。

さて、問題の解答は以下のようになる。

X は弧状連結とし $\pi_n(X, b_X) \cong \{0\}$ とする。任意の $f : S^n \longrightarrow X$ に対し、$f\circ(\varphi|\{0\}\times I^n) : (\{0\}\times I^n, \{0\}\times\partial I^n) \longrightarrow (X, f(b))$ を考える。問題 4.7 により、$\pi_n(X, f(b)) \cong \{0\}$ だから、$G : ([0,1]\times I^n, [0,1]\times\partial I^n \cup \{1\}\times I^n) \longrightarrow (X, f(b))$ で $f\circ(\varphi|\{0\}\times I^n)$ を拡張するものが取れる。この G に対して、$G = g\circ\varphi$ となる $g : D^{n+1} \longrightarrow X$ をとれば、$g|S^n = f$ をみたす。

任意の $f : S^n \longrightarrow X$ に対し、$g : D^{n+1} \longrightarrow X$ で $g|S^n = f$ をみたすものがあるとする。$\pi_n(X, b_X) \cong \{0\}$ の元の代表元 $a : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$ をとる。$(I^n, \partial I^n)$ を $(\{0\}\times I^n, \{0\}\times\partial I^n)$ と同一視して、写像 $f : (S^n, b) \longrightarrow (X, b_X)$ で $a = f\circ(\varphi|\{0\}\times I^n)$ を満たすものがある。仮定から、この f に対して、$g : D^{n+1} \longrightarrow X$ で $g|S^n = f$ をみたすものがある。$G = g\circ\varphi$ とおくと、$G : ([0,1]\times I^n, [0,1]\times\partial I^n \cup \{1\}\times I^n) \longrightarrow (X, b_X)$ であり、$G|\{0\}\times I^n = a$ となるから、$a \simeq c_{b_X}$ となる。

【問題 4.12】 n 次元立方体 I^n について、その境界を ∂I^n とする。m 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 U とその上の点 $b \in U$ について、写像 $f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$ を考える。$f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$ とホモトピックな滑らかな写像 $g : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$, $f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$ とホモトピックな区分線形な写像 $\overline{f} : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$ が存在することを示せ。ただし、区分線形な写像とは、I^n を n 単体に分割できて、各単体の上では 1 次写像（アフィン写像）であるような連続写像のことである。

【問題 4.12 の解答】 作業中

【問題 4.13】 $k < n-1$ ならば、$\pi_k(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}, b_{\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}}) \cong 0$ であることを示せ。

$k < n$ ならば、$\pi_k(S^n, b_{S^n}) \cong 0$ であることを示せ。

【問題 4.13 の解答】 作業中

5 基本群

5.1 円周の基本群

円周 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ について、射影を $p : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ とおく。

第 1 段。まず、2 つの連続関数 $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ が、$p\circ\widetilde{f}_1 = p\circ\widetilde{f}_2$ を満たすならば、ある整数 n があって、$\widetilde{f}_1(x) = \widetilde{f}_2(x) + n$ となることを示せ。なぜならば、$p\circ(\widetilde{f}_1 - \widetilde{f}_2) = p\circ\widetilde{f}_1 - p\circ\widetilde{f}_2 = 0$ だから、$\widetilde{f}_1 - \widetilde{f}_2 \in \boldsymbol{Z}$ であるが、$\widetilde{f}_1 - \widetilde{f}_2$ は連続であるから、$[0,1]$ 上で定数である。従って、ある整数 n があって、$\widetilde{f}_1(x) = \widetilde{f}_2(x) + n$ となる。

第２段。閉区間 $[0,1]$ から円周への連続写像 $f:[0,1]\longrightarrow \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ に対し、連続写像 $\widetilde{f}:[0,1]\longrightarrow \boldsymbol{R}$ で $p\circ\widetilde{f}=f$ を満たすものがあることは直感的には明らかに思われるが、証明は次のように行われる。

(1). 円周を次の３個の開区間で被覆する。

$$V_0=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})\ \mathrm{mod}\ 1,\quad V_1=(0,\frac{2}{3})\ \mathrm{mod}\ 1,\quad V_2=(-\frac{2}{3},0)\ \mathrm{mod}\ 1$$

このとき、ある正実数 δ に対し、定義域 $[0,1]$ の各点 x の δ 近傍 $B_x(\delta)$ の像 $f(B_x(\delta))$ は、V_0, V_1, V_2 のどれかに含まれる。実際、定義域 $[0,1]$ の開被覆 $U_i=f^{-1}(V_i)$ を考え、$[0,1]$ 上の３つの関数 $g_i(x)=\mathrm{dist}(x,[0,1]\setminus U_i)$ $(i=1,$ $2,3)$ を考える。これらは負にならない連続関数で、$U_1\cup U_2\cup U_3=[0,1]$ だから、$\max\{g_1,g_2,g_3\}>0$ である。$\max\{g_1,g_2,g_3\}$ も連続関数であり、その最小値を δ と置く。$x\in[0,1]$ において、ある i については、$g_i(x)\geqq\delta$ であるが、それは、$B_x(\delta)\subset U_i$ を意味する。

(2). (1) で得られる δ に対し、$\dfrac{1}{N}<\delta$ となる自然数 N をとり、$[0,1]$ 区間を N 等分すると、各区間 $[\dfrac{m-1}{N},\dfrac{m}{N}]$ $(m=1,\ \ldots,\ N)$ に対し、$\widetilde{f}_m:[\dfrac{m-1}{N},\dfrac{m}{N}]\longrightarrow\boldsymbol{R}$ で、$p\circ\widetilde{f}_m=f|_{[\frac{m-1}{N},\frac{m}{N}]}$ を満たすものが存在する。実際、$f([\dfrac{m-1}{N},\dfrac{m}{N}])\subset V_i$ となる i が存在するから、V_0 に値を持てば、$(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$ への写像、V_1 に値を持てば、$(0,\dfrac{2}{3})$ への写像、V_3 に値を持てば、$(-\dfrac{2}{3},0)$ への連続写像 $\widetilde{f}_m$ で $p\circ\widetilde{f}_m=f|_{[\frac{m-1}{N},\frac{m}{N}]}$ を満たすものが（i を決めれば一意に）存在する。

(3). 求める $\widetilde{f}$ を構成は、$\widetilde{f}_m$ の定義が一致していない $\dfrac{m}{N}$ 上で、順に補正していくことにより行われる。$\widetilde{f}|_{[0,\frac{1}{N}]}=\widetilde{f}_1$ とおき、$\widetilde{f}|_{[0,\frac{m-1}{N}]}$ が定義されているとする。$p\circ(\widetilde{f}(\dfrac{m-1}{N})-\widetilde{f}_m(\dfrac{m-1}{N}))=0$ だから、$n_m\in\boldsymbol{Z}$ で、$\widetilde{f}(\dfrac{m-1}{N})-\widetilde{f}_m(\dfrac{m-1}{N})=n_m$ を満たすものがある。そこで、$\widetilde{f}|_{[\frac{m-1}{N},\frac{m}{N}]}=\widetilde{f}_m+n_m$ とおくと、$\widetilde{f}|_{[0,\frac{m}{N}]}$ が連続写像として定義される。従って、帰納法により $\widetilde{f}:[0,1]\longrightarrow\boldsymbol{R}$ が定義された。

第３段。正方形 $[0,1]^2$ から円周への連続写像 $F:[0,1]^2\longrightarrow\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ に対し、連続写像 $\widetilde{F}:[0,1]^2\longrightarrow\boldsymbol{R}$ で $p\circ\widetilde{F}=F$ を満たすものがあることも同様の考え方で示される。

(1). まず、ある正実数 δ に対し、定義域 $[0,1]^2$ の各点 x の δ 近傍 $B_x(\delta)$ の像 $F(B_x(\delta))$ は、V_0,V_1,V_2 のどれかに含まれる。証明は上の (1) と全く同じである。

(2). (1) で得られる δ に対し、$\dfrac{1}{N}<\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$ となる自然数 N をとり、正方形を $[0,1]^2$ を１辺の長さが $\dfrac{1}{N}$ の正方形に N^2 等分する。このとき、各小正方形 $K_{m_1m_2}=[\dfrac{m_1-1}{N},\dfrac{m_1}{N}]\times[\dfrac{m_2-1}{N},\dfrac{m_2}{N}]$ 上の関数 $\widetilde{F}_{m_1m_2}$ で, $p\circ\widetilde{F}_{m_1m_2}=F|_{K_{m_1m_2}}$ を満たすものが定まる。

(3). m_1m_2 の辞書式順序に従って、$\widetilde{F}|_{K_{11}}=F_{11}$ とし、$\widetilde{F}|_{\bigcup_{k_1k_2<m_1m_2}K_{k_1k_2}}$ が定まっているときに、$\widetilde{F}|_{K_{m_1m_2}}$ を $\widetilde{F}_{m_1m_2}+n_{m_1m_2}$ $(n_{m_1m_2}\in\boldsymbol{Z})$ の形で作る。このときに、小正方形 $K_{m_1m_2}$ と $\displaystyle\bigcup_{k_1k_2\leqq m_1m_2}K_{k_1k_2}$ の共通部分は、１つの辺ま

たは、隣り合った２つの辺で連結であるから、その上で $\widetilde{F}|_{\bigcup_{k_1k_2<m_1m_2} K_{k_1k_2}} - \widetilde{F}_{m_1m_2}$ の値は一定値 $n_{m_1m_2} \in \boldsymbol{Z}$ となる。

第４段。$S^1 = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ に対し、$b_{S^1} = 0 \mod 1$ とする。
連続関数 $f : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (S^1, b_{S^1})$ に対し、連続写像 $\widetilde{f} : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ で、$p\circ\widetilde{f} = f$ かつ $\widetilde{f}(0) = 0$ となるものをとることができる。$h(f) = \widetilde{f}(1)$ とおくと $h(f) \in \boldsymbol{Z}$ である。写像 $h : \mathrm{Map}(([0,1],\{0,1\}),(S^1,b_{S^1})) \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ について、$f_1 \simeq f_2 : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (S^1, b_{S^1})$ ならば $h(f_1) = h(f_2)$ である．実際、第３段により、f_1 と f_2 の間のホモトピー $F : [0,1]\times([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (S^1, b_{S^1})$ に対し、連続写像 $\widetilde{F} : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ で、$p\circ\widetilde{F} = F$ を満たすものが存在する。このとき、$\widetilde{F}(s,0) \in \boldsymbol{Z}$ は定数 n で、$\widetilde{F} - n$ を改めて、$\widetilde{F}$ と考えれば、$\widetilde{F}(s,0) = 0$ ととることができる。このとき、$\widetilde{F}(s,1) \in \boldsymbol{Z}$ も定数であり、$h(f_1) = \widetilde{F}(0,1)$, $h(f_2) = \widetilde{F}(1,1)$ であるから、$h(f_1) = h(f_2)$ となる。

第５段。上の h により写像 $\varphi : \pi_1(S^1, b_{S^1}) = [([0,1],\{0,1\}),(S^1,b_{S^1})] \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ が定義される。φ は準同型写像である。実際、$f_i : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (S^1, b_{S^1})$ $(i = 1,\ 2)$ に対して、連続写像 $\widetilde{f}_i : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ で、$p\circ\widetilde{f}_i = f_i$, かつ $\widetilde{f}_i(0) = 0$ となるものをとったとき、$\widetilde{f_1\natural f_2} : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ は $\widetilde{f_1\natural f_2}(t) = \begin{cases} \widetilde{f}_1(2t) & (t \in [0,\frac{1}{2}]) \\ \widetilde{f}_2(2t-1) + \widetilde{f}_1(1) & (t \in [\frac{1}{2},1]) \end{cases}$ で定義される。従って、$h(f_1\natural f_2) = h(f_1) + h(f_2)$ であり、$\varphi([f_1][f_2]) = \varphi([f_1]) + \varphi([f_2])$ が示される。$f : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (S^1, b_{S^1})$ に対して、$\overline{f} : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (S^1, b_{S^1})$ を考えると、連続写像 $\widetilde{f} : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ で、$p\circ\widetilde{f} = f$, かつ $\widetilde{f}(0) = 0$ をみたすものに対し、$\widetilde{\overline{f}}(t) = \widetilde{f}(1-t) - \widetilde{f}(1)$ が、$p\circ\widetilde{\overline{f}} = \overline{f}$ かつ $\widetilde{\overline{f}}(0) = 0$ をみたすことがわかる。従って、$h(\overline{f}) = -h(f)$ であり、$\varphi([f]^{-1}) = -\varphi([f])$ がわかる。

第６段。φ は同型写像である。

【問題 5.1】 $D^2 = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$,
$S^1 = \partial D^2 = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, 基点を $b = (1,0)$ とし,
包含写像を $i : (S^1, b) \longrightarrow (D^2, b)$ とする。

$i_* : \pi_1(S^1,b) \longrightarrow \pi_1(D^2,b)$ を考えて，連続写像 $f : D^2 \longrightarrow S^1$ で、$f\circ i = \mathrm{id}_{S^1}$ となるものが存在しないことを示せ。

【問題 5.1 の解答】 $f\circ i = \mathrm{id}_{S^1}$ となる f に対して、$f_* i_* = \mathrm{id}_{\pi_1(S^1,b)} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{Z}}$ となる。ところが、$\pi_1(D^2,b) \cong \{1\}$ だから、$f_* i_* = 0$ であり、矛盾する。

【問題 5.2】 ２次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^2$ と３次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ は同相ではないことを示せ。

【問題 5.2 の解答】 $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}$ と $\boldsymbol{R}^3 \setminus \{0\}$ が同相ではないことを示せばよい。同相写像 $h : \boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{R}^3 \setminus \{0\}$ があれば $\pi_1(\boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}, b) \cong \pi_1(\boldsymbol{R}^3 \setminus \{0\}, h(b))$ となるが、$\pi_1(\boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}, b) \cong \boldsymbol{Z}$, $\pi_1(\boldsymbol{R}^3 \setminus \{0\}, h(b)) \cong 0$ に反する。

【問題 5.3】 (1) 距離空間 X の部分集合 A に対し、X 上の関数 $d_A(x)$ を $d_A(x) = \inf_{a\in A} \mathrm{dist}(x,a)$ で定義する。$d_A : X \longrightarrow \boldsymbol{R}$ は連続であることを示せ。

(2) X 上の実数値連続関数 $f_1, \dots, f_k$ に対し、$F(x) = \max_k f_k(x)$ で定義される関数 $F : X \longrightarrow \boldsymbol{R}$ は連続であることを示せ。

(3) コンパクト距離空間 X 上の有限開被覆 $\{U_1, \dots, U_k\}$ に対し、次を満たす正実数 δ が存在することを示せ。(δ をルベーグ数と呼ぶ。)

- すべての点 $x \in X$ の δ 近傍 $B_x(\delta)$ は、ある開集合 U_j $(j \in \{1, \dots, k\})$ に含まれる。

【問題 5.3 の解答】 作業中

5.2 群の表示

群を生成元と関係式で表示する方法を説明しよう。

群 G は、集合 G で、演算 $G\times G\longrightarrow G$ が指定され、それが、結合律を満たし、単位元 $\mathbf{1}$、各元 g の逆元 g^{-1} が存在するというものである。群 G の部分集合 S が、任意の G の元は S の元とその逆元の積で書かれるという性質をもつとき、S を生成元の集合と呼ぶ。このとき、G の元は S の元をアルファベットとする語（S の元の語）で表されるという。2 つの S の元の語 w_1, w_2 の積は、語を並べた語 w_1w_2 で表される。2 つの語がいつ等しいか、すなわち、G の同じ元を表すかを表せば、群が表示できることになる。$w=s_1\cdots s_k$ $(s_i\in S, i=1,\dots,k)$ に対して、$w^{-1}={s_k}^{-1}\cdots {s_1}^{-1}$ とすると、$w_1=w_2$ という関係式は、$w_1{w_2}^{-1}=\mathbf{1}$ と書かれるから、どのような語が、$\mathbf{1}$ を表すかを指定すればよい。$\mathbf{1}$ を表す語の積や、共役は、$\mathbf{1}$ を表すから、このことを勘案して、できるだけ少ない関係式、すなわち、$\mathbf{1}$ を表すアルファベットを与えて、群を表示することを考える。このとき、自明な関係式 $s_i{s_i}^{-1}={s_i}^{-1}s_i=\mathbf{1}$ は、明示しなくても成立していると考える。

例えば、S が 1 つの元 a からなり、関係式が自明なものしかないときには、群の元は $\mathbf{1}=a^0$, $k\in\boldsymbol{Z}_{>0}$ に対して、$a^k=\overbrace{a\cdots a}^{k}$, $a^{-k}=(a^k)^{-1}$ からなり、$a^ja^k=a^{j+k}$ という計算法則を持つから、無限巡回群 $\boldsymbol{Z}$ と同型な群を表す。

S が k 個の元 $s_1,\ \dots,\ s_k$ からなり、関係式が自明なものしかないときには、群の元は、$\mathbf{1}$ または ${s_{i_1}}^{e_1}\cdots{s_{i_j}}^{e_j}$ で $e_\ell=\pm1$ $(\ell=1,\ \dots,\ j)$ であり、$s_{i_\ell}=si_{j+\ell}$ かつ $e_\ell+e_{\ell+1}=0$ となる ℓ がないというアルファベットの全体となる。これらを簡約された語と呼ぶ。2 つの簡約された語の積は、それらを並べて、自明な関係式で簡約したものとなる。この群を k 元生成自由群と呼ぶ。

群 G の生成元の集合を S とし、$\mathbf{1}$ を表す関係式が、S の元の語の集合 R から、積、共役を取ることで得られるとする。k 元生成自由群と同様に定義される S の元で生成される自由群を F_S と書くと、R は F_S の部分集合であるが、N_R を R を含む F_S の正規部分群で最小のものとする。このとき、G は商の群 F_S/N_R と同型となる。商の群 F_S/N_R を $\langle S\mid R\rangle$ と書く。

例えば、$\boldsymbol{Z}^2=\langle a,b\mid aba^{-1}b^{-1}\rangle$ と書かれる。

定義 5.4 2 つの群 $G_1,\ G_2$ に対し、G_1 と G_2 の自由積 G_1*G_2 は、$G_1=\langle S_1\mid R_1\rangle$, $G_2=\langle S_2\mid R_2\rangle$ とするとき、

$$G_1*G_2=\langle S_1\sqcup S_2\mid R_1\sqcup R_2\rangle$$

で表される。

群 G_{12} からの準同型 $i_1:G_{12}\longrightarrow G_1$, $i_2:G_{12}\longrightarrow G_2$ が与えられたとき、融合積 $G_1\underset{G_{12}}{*}G_2$ は、

$$G_1\underset{G_{12}}{*}G_2=\langle S_1\sqcup S_2\mid R_1\sqcup R_2\rangle\sqcup\{i_1(g_{12})\big(i_2(g_{12})\big)^{-1}\mid g_{12}\in G_{12}\}\rangle$$

で表される。

例えば2元生成自由群は $\langle a, b\rangle = \boldsymbol{Z} * \boldsymbol{Z}$ である。$G\langle S \mid R\rangle$ に対し、S, R の元で生成される自由群 F_S, F_R に対して、$i_1 : F_R \longrightarrow F_S$ を包含写像から誘導される準同型, $i_2 : F_R \longrightarrow \{\mathbf{1}\}$ を自明な準同型とするとき、$G = \langle S \mid R\rangle = F_S \underset{F_R}{*} \{\mathbf{1}\}$ である。

5.3 ファンカンペンの定理

定理 5.5 $X = U_1 \cup U_2$, U_1, U_2 は開集合で、U_1, U_2, $U_{12} = U_1 \cap U_2$ は弧状連結とする。基点 $b \in U_{12} = U_1 \cap U_2$ をとり、包含写像を $i_1 : U_{12} \longrightarrow U_1$, $i_2 : U_{12} \longrightarrow U_2$ とし、これにより誘導される準同型写像を $i_{1*} : \pi_1(U_{12}, b) \longrightarrow \pi_1(U_1, b)$, $i_{2*} : \pi_1(U_{12}, b) \longrightarrow \pi_1(U_2, b)$ とする。次の群の完全列があることを示す。

$$1 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b) \longrightarrow \pi_1(X, b) \longrightarrow 1$$

ここで、$\pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b)$ は群の自由積、$\mathcal{N}$ は、$\pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b)$ の部分集合 $\{i_{1*}\alpha(i_{2*}\alpha)^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(U_{12}, b)\}$ を含む最小の正規部分群である。（このように定義される群は融合積と呼ばれ、$\pi_1(U_1, b) \underset{\pi_1(U_{12}, b)}{*} \pi_1(U_2, b)$ と書かれる。）

【問題 5.6】

$$\begin{aligned} X = &\{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid \big((x^2 + y^2)^{1/2} - 2\big)^2 + z^2 = 1\} \\ &\cup \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid y = 0, (x-2)^2 + z^2 \leqq 1\} \end{aligned}$$

とする。X を図示せよ。X の基本群を求めよ。

【問題 5.6 の解答】 作業中

【問題 5.7】 写像 $f : S^1 \cong \boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を

$$f(\theta) = \big(\cos(2\theta)\{2 + \cos(3\theta)\}, \sin(2\theta)\{2 + \cos(3\theta)\}, \sin(3\theta)\big)$$

で定める。　像 $f(S^1)$ を図示せよ。$\boldsymbol{R}^3 - f(S^1)$ の基本群を求めよ。この群のアーベル化は何か。
(ヒント: $\{(x, y, z) \mid \big((x^2 + y^2)^{1/2} - 2\big)^2 + z^2 = 1\}$ という曲面に注目する。ファンカンペンの定理を使う。)

時間のある人は次の問題を考えてみて下さい。

上の問題の $\boldsymbol{R}^3 - f(S^1)$ の基本群が $\boldsymbol{Z}$ と異なること、つまり可換群でないことはどうすればわかるか。

【問題 5.7 の解答】 作業中

ファンカンペンの定理の証明

(1)　$f : ([0, 1], \{0, 1\}) \longrightarrow (U_1 \cup U_2, b)$ に対し、$f^{-1}(U_1)$, $f^{-1}(U_2)$ に対するルベーグ数を考えると、十分大きな自然数 N に対し、$[0, 1]$ 区間を N 等分すると、$[\dfrac{m-1}{N}, \dfrac{m}{N}]$ の像は U_1 または U_2 に含まれる。$f(\dfrac{m}{N})$ が $U_1 \setminus U_{12}$, $U_2 \setminus U_{12}$, U_{12} の点の時、$f(\dfrac{m}{N})$ と b を結ぶ曲線 γ_m を U_1, U_2, U_{12} 内に取る。$f|[\dfrac{m-1}{N}, \dfrac{m}{N}] = f_m$ とおいて、

$$f \simeq f_1 \natural \overline{\gamma_1} \natural \gamma_1 \natural f_2 \natural \overline{\gamma_2} \natural \gamma_2 \natural f_3 \natural \overline{\gamma_3} \natural \cdots \natural \gamma_{N-1} \natural f_N$$

とすると $\gamma_{m-1} \natural f_m \natural \overline{\gamma_m}$ は U_1 または U_2 のループである。これから自由積からの全射があることがわかる。

(2)　自由積として得られた $f:([0,1],\{0,1\})\longrightarrow(U_1\cup U_2,b)$ が b への定値写像にホモトピックとすると、写像 $F:[0,1]^2\longrightarrow U_1\cup U_2$ で、$F(1,t)=f(t)$, $F(0,t)=b$, $F(s,0)=F(s,1)=b$ をみたすものが存在する。$F^{-1}(U_1)$, $F^{-1}(U_2)$ についてのルベーグ数を考えると、十分大きな自然数 N に対し、正方形 $[0,1]^2$ を N^2 等分すると、$[\dfrac{m-1}{N},\dfrac{m}{N}]\times[\dfrac{n-1}{N},\dfrac{n}{N}]$ の像は U_1 または U_2 に含まれる。$F(\dfrac{m}{N},\dfrac{n}{N})$ が $U_1\setminus U_{12}$, $U_2\setminus U_{12}$, U_{12} の点の時、$F(\dfrac{m}{N},\dfrac{n}{N})$ と b を結ぶ曲線 γ_{mn} を U_1, U_2, U_{12} 内に取る。この γ_{mn} を使って、F をホモトピーで変形して、$G(\dfrac{m}{N},\dfrac{n}{N})=b$ となる写像 $G:[0,1]^2\longrightarrow U_1\cup U_2$ をつくる。$G(1,t)=f_{N1}\natural\dots\natural f_{NN}$ の f_{Nn} は、$\pi_1(U_1,b)$ または $\pi_1(U_2,b)$ の元を表すが、この書き方は、もとの f を $\pi_1(U_1,b)$ または $\pi_1(U_2,b)$ の関係式で書き換えたものである。($[f]$ と自由積の中で同じ元である。)

小正方形は U_1, U_2 のいずれかに写されるから、隣り合う小正方形の共通部分となる辺は、小正方形がともに U_1 または U_2 に写されれば、U_1 または U_2 に写され、一方が U_1、他方が U_2 に写されるときには、U_{12} に写される。このとき、この辺に対応する $\alpha\in\pi_1(U_{12},b)$ をとると、U_1 に写る正方形の側では、この元を $\pi_1(U_1,b)$ の元と見た $i_{1*}\alpha$ と書き、U_2 に写る正方形の側では、$\pi_1(U_2,b)$ の元と見た $i_{2*}\alpha$ と書いているはずである。

図のように、辺からの写像に、それぞれの小正方形の側から名前が付けられているとする。f_{mn}, g_{mn}, h_{mn}, k_{mn} は、それぞれ小正方形の写る先の $\pi_1(U_1,b)$ または $\pi_1(U_2,b)$ の元を表す。

小正方形によるホモトピーによって、$f_{mn}\simeq\overline{k_{m,n-1}}\natural g_{m-1,n}\natural h_{mn}$ であるが、これは小正方形が写される U_1, U_2 の基本群 $\pi_1(U_1,b)$, $\pi_1(U_2,b)$ のなかの関係式である。一方、$h_{m,n}\natural\overline{k_{m,n}}$, $\overline{f_{m,n}}\natural g_{m,n}$ は、その辺の両側が、ともに U_1 または U_2 に写されていれば、$\pi_1(U_1,b)$, $\pi_1(U_2,b)$ のなかの関係式であるが、その辺の一方が U_1、他方が U_2 に写されるときには、その辺のあらわす $\alpha\in\pi_1(U_{12},b)$ を使って $i_{1*}\alpha(i_{2*}\alpha)^{-1}$ の形にかかれている。

次のように変形すると、$f_{N1}\natural f_{N2}\natural\dots\natural f_{NN}$ は $g_{N-1,1}\natural g_{N-1,2}\natural\dots\natural g_{N-1,N}$ に $\mathcal{N}$ の元を掛けたものである事がわかる。

$$\begin{aligned}
&f_{N1}\natural f_{N2}\natural\dots\natural f_{NN}\\
\simeq&(g_{N-1,1}\natural h_{N1})\natural(\overline{k_{N1}}\natural g_{N-1,2}\natural h_{N2})\natural\dots\natural(\overline{k_{N,N-1}}\natural g_{N-1,N})\\
=&g_{N-1,1}\natural(h_{N1}\natural\overline{k_{N1}})\natural g_{N-1,2}\natural h_{N2}\natural\dots\natural(h_{N,N-1}\natural\overline{k_{N,N-1}})\natural g_{N-1,N}\\
\simeq&g_{N-1,1}\natural g_{N-1,2}\natural\dots\natural g_{N-1,N}\\
&\quad\natural\overline{g_{N-1,2}\natural\dots\natural g_{N-1,N}}\natural(h_{N1}\natural\overline{k_{N1}})\natural g_{N-1,2}\natural\dots\natural g_{N-1,N}\\
&\quad\natural\overline{g_{N-1,3}\natural\dots\natural g_{N-1,N}}\natural\dots\\
&\quad\natural\overline{g_{N-1,N}}\natural(h_{N,N-1}\natural\overline{k_{N,N-1}})\natural g_{N-1,N}
\end{aligned}$$

さらに次のように変形すると、$g_{N-1,1}\natural g_{N-1,2}\natural\dots\natural g_{N-1,N}$ は $f_{N-1,1}\natural f_{N-1,2}\natural\dots\natural f_{N-1,N}$ に $\mathcal{N}$ の元を掛けたものである事がわかる。

$$\begin{aligned}
&g_{N-1,1}\natural g_{N-1,2}\natural\dots\natural g_{N-1,N}\\
\simeq&f_{N-1,1}\natural f_{N-1,2}\natural\dots\natural f_{N-1,N}\\
&\quad\natural\overline{f_{N-1,2}\natural\dots\natural f_{N-1,N}}(\overline{f_{N-1,1}}\natural g_{N-1,1})\natural f_{N-1,2}\natural\dots\natural f_{N-1,N}\\
&\quad\natural\overline{f_{N-1,3}\natural\dots\natural f_{N-1,N}}(\overline{f_{N-1,2}}\natural g_{N-1,2})\natural f_{N-1,3}\natural\dots\natural f_{N-1,N}\natural\dots\\
&\quad\natural(\overline{f_{N-1,N}}\natural g_{N-1,N})
\end{aligned}$$

これを続けると、$g_{1,1}\natural g_{1,2}\natural\dots\natural g_{1,N}$ は b への定値写像で単位元を表すから、もとの元は $\mathcal{N}$ の元であったことがわかる。

図 3: ファンカンペンの定理

5.4　有限胞体複体の基本群（展開）

作業中

5.5　ファイバー空間のホモトピー完全列（展開）