

資料 .

### ファン・カンペンの定理の証明

$X = U_1 \cup U_2$ ,  $U_1, U_2$  は開集合で、 $U_1, U_2, U_{12} = U_1 \cap U_2$  は弧状連結とする。基点  $b \in U_{12} = U_1 \cap U_2$  をとり、包含写像を  $i_1 : U_{12} \rightarrow U_1, i_2 : U_{12} \rightarrow U_2$  とし、これにより誘導される準同型写像を  $i_{1*} : \pi_1(U_{12}, b) \rightarrow \pi_1(U_1, b), i_{2*} : \pi_1(U_{12}, b) \rightarrow \pi_1(U_2, b)$  とする。次の群の完全列があることを示す。

$$1 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b) \rightarrow \pi_1(X, b) \rightarrow 1$$

ここで、 $\pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b)$  は群の自由積、 $\mathcal{N}$  は、 $\pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b)$  の部分集合  $\{i_{1*}\alpha(i_{2*}\alpha)^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(U_{12}, b)\}$  を含む最小の正規部分群である。(このように定義される群は融合積と呼ばれ、 $\pi_1(U_1, b) \underset{\pi_1(U_{12}, b)}{*} \pi_1(U_2, b)$  と書かれる。)

証明。

(1)  $f : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (U_1 \cup U_2, b)$  に対し、 $f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)$  に対するルベーク数を考えると、十分大きな自然数  $N$  に対し、 $[0, 1]$  区間を  $N$  等分すると、 $[\frac{m-1}{N}, \frac{m}{N}]$  の像は  $U_1$  または  $U_2$  に含まれる。 $f(\frac{m}{N})$  が  $U_1 \setminus U_{12}, U_2 \setminus U_{12}, U_{12}$  の点の時、 $f(\frac{m}{N})$  と  $b$  を結ぶ曲線  $\gamma_m$  を  $U_1, U_2, U_{12}$  内にとる。 $f|[\frac{m-1}{N}, \frac{m}{N}] = f_m$  とおいて、

$$f \simeq f_1 \frown \overline{\gamma_1} \frown \gamma_1 \frown f_2 \frown \overline{\gamma_2} \frown \gamma_2 \frown f_3 \frown \overline{\gamma_3} \frown \dots \frown \gamma_{N-1} \frown f_N$$

とすると  $\gamma_{m-1} \frown f_m \frown \overline{\gamma_m}$  は  $U_1$  または  $U_2$  のループである。これから自由積からの全射があることがわかる。

(2) 自由積として得られた  $f : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (U_1 \cup U_2, b)$  が  $b$  への定値写像にホモトピックとすると、写像  $F : [0, 1]^2 \rightarrow U_1 \cup U_2$  で、 $F(1, t) = f(t), F(0, t) = b, F(s, 0) = F(s, 1) = b$  をみたすものが存在する。 $F^{-1}(U_1), F^{-1}(U_2)$  についてのルベーク数を考えると、十分大きな自然数  $N$  に対し、正方形  $[0, 1]^2$  を  $N^2$  等分すると、 $[\frac{m-1}{N}, \frac{m}{N}] \times [\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}]$  の像は  $U_1$  または  $U_2$  に含まれる。 $F(\frac{m}{N}, \frac{n}{N})$  が  $U_1 \setminus U_{12}, U_2 \setminus U_{12}, U_{12}$  の点の時、 $F(\frac{m}{N}, \frac{n}{N})$  と  $b$  を結ぶ曲線  $\gamma_{mn}$  を  $U_1, U_2, U_{12}$  内にとる。この  $\gamma_{mn}$  を使って、 $F$  をホモトピーで変形して、 $G(\frac{m}{N}, \frac{n}{N}) = b$  となる写像  $G : [0, 1]^2 \rightarrow U_1 \cup U_2$  をつくる。 $G(1, t) = f_{N1} \frown \dots \frown f_{Nn}$  の  $f_{Nn}$  は、 $\pi_1(U_1, b)$  または  $\pi_1(U_2, b)$  の元を表すが、この書き方は、もとの  $f$  を  $\pi_1(U_1, b)$  または  $\pi_1(U_2, b)$  の関係式で書き換えたものである。( $[f]$  と自由積の中で同じ元である。)

小正方形は  $U_1, U_2$  のいずれかに写されるから、隣り合う小正方形の共通部分となる辺は、小正方形がともに  $U_1$  または  $U_2$  に写されれば、 $U_1$  または  $U_2$  に写され、一方が  $U_1$ 、他方が  $U_2$  に写されるときには、 $U_{12}$  に写される。このとき、この辺に対応する  $\alpha \in \pi_1(U_{12}, b)$  をとると、 $U_1$  に写る正方形の側では、この元を  $\pi_1(U_1, b)$  の元と見た  $i_{1*}\alpha$  と書き、 $U_2$  に写る正方形の側では、 $\pi_1(U_2, b)$  の元と見た  $i_{2*}\alpha$  と書いているはずである。

図のように、辺からの写像に、それぞれの小正方形の側から名前が付けられているとする。 $f_{mn}, g_{mn}, h_{mn}, k_{mn}$  は、それぞれ小正方形の写る先の  $\pi_1(U_1, b)$  または  $\pi_1(U_2, b)$  の元を表す。

小正方形によるホモトピーによって、 $f_{mn} \simeq \overline{k_{m,n-1}} \natural g_{m-1,n} \natural h_{mn}$  であるが、これは小正方形が写される  $U_1, U_2$  の基本群  $\pi_1(U_1, b), \pi_1(U_2, b)$  のなかの関係式である。一方、 $h_{m,n} \natural \overline{k_{m,n}}, \overline{f_{m,n}} \natural g_{m,n}$  は、その辺の両側が、ともに  $U_1$  または  $U_2$  に写されていれば、 $\pi_1(U_1, b), \pi_1(U_2, b)$  のなかの関係式であるが、その辺の一方が  $U_1$ 、他方が  $U_2$  に写されるときには、その辺のあらわす  $\alpha \in \pi_1(U_{12}, b)$  を使って  $i_{1*}\alpha(i_{2*}\alpha)^{-1}$  の形にかかっている。

次のように変形すると、 $f_{N1} \natural f_{N2} \natural \dots \natural f_{NN}$  は  $g_{N-1,1} \natural g_{N-1,2} \natural \dots \natural g_{N-1,N}$  に  $\mathcal{N}$  の元を掛けたものである事がわかる。

$$\begin{aligned}
 & f_{N1} \natural f_{N2} \natural \dots \natural f_{NN} \\
 \simeq & (g_{N-1,1} \natural h_{N1}) \natural (\overline{k_{N1}} \natural g_{N-1,2} \natural h_{N2}) \natural \dots \natural (\overline{k_{N,N-1}} \natural g_{N-1,N}) \\
 = & g_{N-1,1} \natural (h_{N1} \natural \overline{k_{N1}}) \natural g_{N-1,2} \natural h_{N2} \natural \dots \natural (h_{N,N-1} \natural \overline{k_{N,N-1}}) \natural g_{N-1,N} \\
 \simeq & g_{N-1,1} \natural g_{N-1,2} \natural \dots \natural g_{N-1,N} \\
 & \quad \natural \overline{g_{N-1,2} \natural \dots \natural g_{N-1,N}} \natural (h_{N1} \natural \overline{k_{N1}}) \natural g_{N-1,2} \natural \dots \natural g_{N-1,N} \\
 & \quad \natural \overline{g_{N-1,3} \natural \dots \natural g_{N-1,N}} \natural \dots \\
 & \quad \natural \overline{g_{N-1,N}} \natural (h_{N,N-1} \natural \overline{k_{N,N-1}}) \natural g_{N-1,N}
 \end{aligned}$$

さらに次のように変形すると、 $g_{N-1,1} \natural g_{N-1,2} \natural \dots \natural g_{N-1,N}$  は  $f_{N-1,1} \natural f_{N-1,2} \natural \dots \natural f_{N-1,N}$  に  $\mathcal{N}$  の元を掛けたものである事がわかる。

$$\begin{aligned}
 & g_{N-1,1} \natural g_{N-1,2} \natural \dots \natural g_{N-1,N} \\
 \simeq & f_{N-1,1} \natural f_{N-1,2} \natural \dots \natural f_{N-1,N} \\
 & \quad \natural \overline{f_{N-1,2} \natural \dots \natural f_{N-1,N}} \natural (f_{N-1,1} \natural g_{N-1,1}) \natural f_{N-1,2} \natural \dots \natural f_{N-1,N} \\
 & \quad \natural \overline{f_{N-1,3} \natural \dots \natural f_{N-1,N}} \natural (f_{N-1,2} \natural g_{N-1,2}) \natural f_{N-1,3} \natural \dots \natural f_{N-1,N} \natural \dots \\
 & \quad \natural \overline{f_{N-1,N}} \natural g_{N-1,N}
 \end{aligned}$$

これを続けると、 $g_{1,1} \natural g_{1,2} \natural \dots \natural g_{1,N}$  は  $b$  への定値写像で単位元を表すから、もとの元は  $\mathcal{N}$  の元であったことがわかる。

			$f_{45}$	$g_{45}$	$f_{55}$
				$k_{54}$	
			$f_{44}$	$g_{44}$	$f_{54}$
				$h_{54}$	
			$f_{43}$	$g_{43}$	$f_{53}$
				$h_{53}$	
				$k_{52}$	
			$f_{42}$	$g_{42}$	$f_{52}$
				$h_{52}$	
				$k_{51}$	
			$f_{41}$	$g_{41}$	$f_{51}$
				$h_{51}$	