

2009年度幾何学特別演習II 問題 10月14日

円周 \mathbf{R}/\mathbf{Z} について、射影を $p: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ とおく。

演習問題 2 - 1 . 2つの連続関数 $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ が、 $p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_2$ を満たすならば、ある整数 n があって、 $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) + n$ となることを示せ。

演習問題 2 - 2 . 閉区間 $[0, 1]$ から円周への連続写像 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ に対し、連続写像 $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ で $p \circ \tilde{f} = f$ を満たすものがあることを示せ。

(ヒント: 以下の手順に従うと良い。)

(1) 円周を次の3個の開区間で被覆する。

$$V_0 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \bmod 1, \quad V_1 = \left(0, \frac{2}{3}\right) \bmod 1, \quad V_2 = \left(-\frac{2}{3}, 0\right) \bmod 1$$

ある正実数 δ に対し、定義域 $[0, 1]$ の各点 x の δ 近傍 $B_x(\delta)$ の像 $f(B_x(\delta))$ は、 V_0, V_1, V_2 のどれかに含まれることを示せ。

ヒント: 定義域 $[0, 1]$ の開被覆 $U_i = f^{-1}(V_i)$ を考えるとよい。(裏面「問題」参照。)

(2) (1) で得られる δ に対し、 $\frac{1}{N} < \delta$ となる自然数 N をとり、 $[0, 1]$ 区間を N 等分すると、各区間 $[\frac{m-1}{N}, \frac{m}{N}]$ ($m = 1, \dots, N$) に対し、 $\tilde{f}_m: [\frac{m-1}{N}, \frac{m}{N}] \rightarrow \mathbf{R}$ で、 $p \circ \tilde{f}_m = f|_{[\frac{m-1}{N}, \frac{m}{N}]}$ を満たすものが存在することを示せ。

(3) 求める \tilde{f} を構成せよ。

演習問題 2 - 3 . 正方形 $[0, 1]^2$ から円周への連続写像 $F: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ に対し、連続写像 $\tilde{F}: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbf{R}$ で $p \circ \tilde{F} = F$ を満たすものがあることを示せ。

(ヒント: 演習問題 2 と同様の手順に従うと良い。正方形を分割して辞書式順序に従って構成することができる。)

演習問題 2 - 4 . $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ に対し、 $b_{S^1} = 0 \bmod 1$ とする。

連続関数 $f: ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (S^1, b_{S^1})$ に対し、連続写像 $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ で、 $p \circ \tilde{f} = f$ かつ $\tilde{f}(0) = 0$ となるものをとることができる。 $h(f) = \tilde{f}(1)$ とおくと $h(f) \in \mathbf{Z}$ である。写像 $h: \text{Map}([0, 1], \{0, 1\}), (S^1, b_{S^1}) \rightarrow \mathbf{Z}$ について、 $f_1 \simeq f_2: ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (S^1, b_{S^1})$ ならば $h(f_1) = h(f_2)$ であることを示せ。

演習問題 2 - 5 . 上の h により写像 $\varphi: \pi_1(S^1, b_{S^1}) = [([0, 1], \{0, 1\}), (S^1, b_{S^1})] \rightarrow \mathbf{Z}$ が定義される。

(1) φ は準同型写像であることを示せ。

(2) φ は同型写像であることを示せ。

問題 2 - 6 . (1) 距離空間 X の部分集合 A に対し、 X 上の関数 $d_A(x)$ を $d_A(x) = \inf_{a \in A} \text{dist}(x, a)$ で定義する。 $d_A : X \rightarrow \mathbf{R}$ は連続であることを示せ。

(2) X 上の実数値連続関数 f_1, \dots, f_k に対し、 $F(x) = \max_k f_k(x)$ で定義される関数 $F : X \rightarrow \mathbf{R}$ は連続であることを示せ。

(3) コンパクト距離空間 X 上の有限開被覆 $\{U_1, \dots, U_k\}$ に対し、次を満たす正実数 δ が存在することを示せ。(δ をルベーク数と呼ぶ。)

- すべての点 $x \in X$ の δ 近傍 $B_x(\delta)$ は、ある開集合 U_j ($j \in \{1, \dots, k\}$) に含まれる。