２００９年度幾何学特別演習 II　問題　　１１月４日　　訂正版

ホモロジー理論の公理は、以下のもの。

- （位相空間対，連続写像）から（次数つき $\mathbf{Z}$ 加群，準同型写像）への共変関手である。
- 連続写像がホモトピックなら誘導される準同型は一致する。（ホモトピー公理）
- 対の完全列があり、連結準同型は自然性を持つ。
- $X \supset U \supset B$, U は開集合、B は閉集合のとき、$H_*(X \setminus B, U \setminus B) \cong H_*(X, U)$（切除公理）
- $H_*(\text{１点}) \cong \mathbf{Z}\ (* = 0), \cong 0\ (* \neq 0)$. （次元公理）

演習問題４−１． $X \supset A \supset V$, A は閉集合、V は開集合とする。$X \supset U \supset A$ となる開集合 U と、ホモトピー $f_t : X \setminus V \longrightarrow X \setminus V$ $(t \in [0,1])$ で、$f_0 = \mathrm{id}_{X\setminus V}$, $f_t|(A \setminus V) = \mathrm{id}_{A\setminus V}$ $(t \in [0,1])$, $f_t(U \setminus V) \subset U \setminus V$, $f_1(U \setminus V) \subset A \setminus V$ を満たすものが存在すると仮定する（特に、$A \setminus V$ は $U \setminus V$ の変形レトラクトである)。このとき、包含写像 $(X \setminus V, A \setminus V) \longrightarrow (X, A)$ は、同型写像 $H_*(X \setminus V, A \setminus V) \cong H_*(X, A)$ を誘導することを示せ。

ヒント：包含写像 $(X \setminus V, A \setminus V) \longrightarrow (X \setminus V, U \setminus V)$, $(X, A) \longrightarrow (X, U)$, $(X \setminus A, U \setminus A) \longrightarrow (X, U)$, $(X \setminus A, U \setminus A) \longrightarrow (X \setminus V, U \setminus V)$ を使う。

例えば、n 次元多様体 X の１つの座標近傍 (U, φ) に埋め込まれた n 次元円板 D^n に対し、$\varphi(D^n) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq 1\}$ とするとき、$V = X \setminus D^n$, $A = X \setminus \mathrm{int}(D^n)$ に対して、$U = X \setminus D^n_\varepsilon$ $(\varphi(D^n_\varepsilon) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq \varepsilon\})$ として用いる。

演習問題４−２． (1)　ホモロジー理論の公理から、$H_*([0,1], \{b\})$ を求めよ。ただし、$b \in [0,1]$.
(2)　空間対 $([0,1], \{0\})$, $([0,1], \{1\})$ のホモロジー完全列と空間対 $([0,1], \{0,1\})$ のホモロジー完全列を比較して、$H_*([0,1], \{0,1\})$ を求めよ。

演習問題４−３． $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1\}$,
$S^1_+ = \{x = (x_1, x_2) \in S^1 \mid x_1 \geqq 0\}$, $S^1_- = \{x = (x_1, x_2) \in S^1 \mid x_1 \leqq 0\}$ とする。
$(S^1_+, \partial S^1_+)$ と $(S^1_-, \partial S^1_-)$ のホモロジー完全列は、$([0,1], \{0,1\})$ のホモロジー完全列と同じとみなせる。空間対 $(S^1_+, \partial S^1_+)$, (S^1, S^1_-) のホモロジー完全列を比較し、$H_*(S^1, S^1_-) \cong H_*(S^1_+, \partial S^1_+)$ に注意して、$H_*(S^1)$ を求めよ。

演習問題４－４． $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leqq 1\}$, $S^{n-1} = \partial D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\}$,
$S_+^{n-1} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1} \mid x_1 \geqq 0\}$,
$S_-^{n-1} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1} \mid x_1 \leqq 0\}$ とする。
(1) $H_*(D^2, \partial D^2)$ を求めよ。
(2) $H_*(S^2)$ を求めよ。
(3) $H_*(D^3, \partial D^3)$ を求めよ。
(4) $H_*(S^3)$ を求めよ。

問題４－５． n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ は、次元が異なれば同相でないことを示せ。

問題４－６． $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leqq 1\}$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ とするとき、連続写像 $r : D^n \longrightarrow S^{n-1}$ で $r|S^{n-1} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ をみたすものは存在しないことを示せ。
ヒント：包含写像 $i : S^{n-1} \longrightarrow D^n$ との結合を考える。

問題４－７． すべての連続写像 $f : D^n \longrightarrow D^n$ に対し、$f(x) = x$ となる $x \in D^n$ が存在することを示せ（ブラウアーの不動点定理）。
ヒント：すべての点で $f(x) \neq x$ と仮定して、$f(x), x$ を結ぶ直線と、∂D^n の交点の一方を x の関数として考える。次元は一般だが、演習問題３－２と同じ。

問題４－８． 連続写像 $f : S^n \longrightarrow S^n$ が全射でないならば、$\deg f = 0$ を示せ。ただし、写像度 $\deg f$ は $H_n(S^n; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ の生成元 1 を固定して、$f_*(1) = n \cdot 1$ のとき、$\deg f = n$ と定義する。