

2009年度幾何学特別演習II 問題 12月16日

演習問題10-1.(1) $D^2 \times S^1$ の胞体分割を定めよ。

(2) 円周を $S^1 = e^0 \cup e^1$ と胞体分割するとき、射影 $D^2 \times S^1 \rightarrow S^1$ の胞体近似を記述せよ。

演習問題10-2.(1) 境界の包含写像 $i : \partial D^2 \times S^1 \rightarrow D^2 \times S^1$ について、 $i_* : H_k(\partial D^2 \times S^1) \rightarrow H_k(D^2 \times S^1)$ ($k = 0, 1, 2, 3$) を記述せよ。

(2) $S^3 = D^2 \times S^1 \cup S^1 \times D^2$, $D^2 \times S^1 \cap S^1 \times D^2 \approx S^1 \times S^1$ についてマイヤー・ビエトリス完全系列を書き、そこに現れる準同型を記述せよ。

(3) 空間対 $(D^2 \times S^1, \partial D^2 \times S^1)$ のホモロジー完全系列により、 $H_k(D^2 \times S^1, \partial D^2 \times S^1)$ を求めよ。

演習問題10-3.(1) $S^2 \times S^2$ の胞体分割を定め、ホモロジー群を求めよ。

(2) $\mathbf{R}P^2 \times \mathbf{R}P^2$ の胞体分割を定め、ホモロジー群を求めよ。

演習問題10-4.有限生成アーベル群 A に対し、 $0 \rightarrow \mathbf{Z}^m \rightarrow \mathbf{Z}^n \rightarrow A \rightarrow 0$ が完全系列となるように $\mathbf{Z}^m \rightarrow \mathbf{Z}^n$ をとる。このとき、 $B^m \rightarrow B^n \rightarrow A \otimes B \rightarrow 0$ は完全系列である(問題10-5参照)。

$\text{Tor}(A, B)$ を $0 \rightarrow \text{Tor}(A, B) \rightarrow B^m \rightarrow B^n \rightarrow A \otimes B \rightarrow 0$ が完全系列となることで定義する。

$\text{Tor}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ を求めよ。

問題10-5. \mathbf{Z} 上のテンソル積 \otimes を考える。加群(アーベル群)の完全系列

$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} A' \rightarrow A'' \rightarrow 0$ に対し、 $A \otimes B \xrightarrow{i \otimes \text{id}_B} A' \otimes B \rightarrow A'' \otimes B \rightarrow 0$ は完全であることを示せ。

ヒント: テンソル積は任意の双 \mathbf{Z} 線形写像 $A \times B \rightarrow C$ が $A \otimes B \rightarrow C$ を一意にファクターすることで定義される。あるいは $A \otimes B = A \times B / \sim$ (\sim は $n \in \mathbf{Z}$ に対し $(na, b) \sim (a, nb)$ から生成される同値関係) と定義される。 (a, b) の同値類を $a \otimes b$ と書く。

(1) 準同型 $A \rightarrow A'$ に対し、 $a \mapsto a'$ ならば $a \otimes b \mapsto a' \otimes b$ だから $A \otimes B \rightarrow A' \otimes B$ が定義される。同様に、準同型 $A' \rightarrow A''$ に対し、 $A' \otimes B \rightarrow A'' \otimes B$ が定義される。問題のうち、 $A' \otimes B \rightarrow A'' \otimes B \rightarrow 0$ は、この定義から従う。

(2) $K = \ker(A' \otimes B \rightarrow A'' \otimes B)$ とすると、 $(i \otimes \text{id}_B)(A \otimes B) \subset K$ である。

$a'' \mapsto a' \text{ mod } i(A)$ をとることができるが、 $a'' \otimes b \mapsto a' \otimes b \text{ mod } (i \otimes \text{id}_B)(A \otimes B)$ により、 $A'' \otimes B \rightarrow A' \otimes B / (i \otimes \text{id}_B)(A \otimes B)$ が定義される。 $A' \otimes B \rightarrow A'' \otimes B \rightarrow A' \otimes B / (i \otimes \text{id}_B)(A \otimes B)$ は射影 $A' \otimes B \rightarrow A' \otimes B / (i \otimes \text{id}_B)(A \otimes B)$ と一致するから、 $K \subset (i \otimes \text{id}_B)(A \otimes B)$ 。

問題 10 - 6 . (1) $1 \leq m < n$ とする。

$S^{m+n+1} = D^{m+1} \times S^n \cup S^m \times D^{n+1}$, $D^{m+1} \times S^n \cap S^m \times D^{n+1} \approx S^m \times S^n$ についてマイヤー・ビエトリス完全系列を書き、そこに現れる準同型を記述せよ。

(2) $m \geq 1$ とする。

$S^{2m+1} = D^{m+1} \times S^m \cup S^m \times D^{m+1}$, $D^{m+1} \times S^m \cap S^m \times D^{m+1} \approx S^m \times S^m$ についてマイヤー・ビエトリス完全系列を書き、そこに現れる準同型を記述せよ。

参考

n 次元立方体 I^n は、 $\{e_0^0, e_1^0, e^1\}^n$ の元に対応する 3^n 個の胞体からなる胞体複体の構造をもつ。立方体の各面に対応するチェイン複体の生成元について、座標の順序により、 ∂ が定められているとする。すなわち、

$$\partial e^1 = e_1^0 - e_0^0, \quad \partial(e^1 \times e^1) = (e_1^0 - e_0^0) \times e^1 - e^1 \times (e_1^0 - e_0^0), \quad \dots$$

I^n に対しては、

$$\partial(e^1 \times \dots \times e^1) = (\partial e^1) \times \dots \times e^1 - e^1 \times (\partial e^1) \times \dots \times e^1 + \dots + (-1)^{n-1} e^1 \times \dots \times e^1 \times (\partial e^1)$$

となる。

$I^{m+n+2} = I^{m+1} \times I^{n+1}$ を考える。 $e^{m+1} = \prod^{m+1} e^1$, $e^{n+1} = \prod^{n+1} e^1$ に対し、 $\partial e^{m+1} = e^m$, $\partial e^{n+1} = e^n$ とする胞体分割をとる。

$$\begin{aligned} \partial(e^{m+1} \times e^{n+1}) &= (\partial e^{m+1}) \times e^{n+1} + (-1)^{m+1} e^{m+1} \times (\partial e^{n+1}) \\ &= e^m \times e^{n+1} + (-1)^{m+1} e^{m+1} \times e^n \end{aligned}$$

である。これによると

$$\partial(e^m \times e^{n+1} + (-1)^{m+1} e^{m+1} \times e^n) = (-1)^m e^m \times e^n + (-1)^{m+1} e^m \times e^n = 0$$

となる。