

2009年度幾何学特別演習II 問題 1月20日

演習問題12-1. X, Y, Z を次で与えられる位相空間とする。

$$\begin{aligned}
 X &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid ((x^2 + y^2)^{1/2} - 2)^2 + z^2 = 1\} \\
 &\quad \cup \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 0, (x - 2)^2 + z^2 \leq 1\} \\
 Y &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \\
 &\quad \cup \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = y = 0, |z| \leq 1\} \\
 Z &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 1\} \\
 &\quad \cup \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 0, (x - 1)^2 + z^2 = 1\}
 \end{aligned}$$

- (1) X, Y, Z の胞体分割、単体分割を与えよ。
- (2) X, Y, Z の胞体分割に対応するチェイン複体を書き、ホモロジー群を求めよ。
- (3) Y, Z の単体分割に対応するチェイン複体を書き、ホモロジー群を求めよ。

演習問題12-2. 位相空間 X, Y のジョイン (join) $X * Y$ を商空間 $X * Y = X \times [0, 1] \times Y / \sim$ として定義する。但し、同値関係 \sim は、

$$\begin{aligned}
 (x_1, t_1, y_1) \sim (x_2, t_2, y_2) &\iff (t_1 = t_2 = 0 \text{ かつ } x_1 = x_2) \\
 &\quad \text{または} \\
 &\quad (t_1 = t_2 = 1 \text{ かつ } y_1 = y_2)
 \end{aligned}$$

で生成されるものとする。

- (1) $S^k * S^\ell \approx S^{k+\ell+1}$ を示せ。
- (2) $X = \{p\}$ (1点からなる空間) とするとき、 $\{p\} * Y$ を Y 上の錐 (cone) と呼ぶ。 $\{p\} * Y$ は可縮な (1点とホモトピー同値な) 位相空間であることを示せ。
- (3) $X = S^0 = \{-1, 1\}$ のとき、 $S^0 * Y$ を Y の懸垂 (suspension) と呼ぶ。 Y のホモロジー群により、 $S^0 * Y$ のホモロジー群を表せ。

ユークリッド空間の2つの交わらないアフィン空間上の単体 $\sigma^k = \langle v_0 \cdots v_k \rangle$, $\sigma^\ell = \langle w_0 \cdots w_\ell \rangle$ に対して、それらのジョインを $\sigma^k * \sigma^\ell = \langle v_0 \cdots v_k w_0 \cdots w_\ell \rangle$ で定義する。2つの交わらないアフィン空間上の単体複体 K, L に対し、それらのジョイン $K * L$ を、 K の単体、 L の単体、 K の単体と L の単体のジョインとして得られる単体からなる単体複体とする。

問題12-3. (1) 単体複体 K, L のジョイン $K * L$ のチェイン複体の単体について以下が成立することを示せ。

$$\partial(\sigma_0^0 * \sigma_1^0) = \sigma_1^0 - \sigma_0^0, \ell \geq 1 \text{ のとき、} \partial(\sigma^0 * \sigma^\ell) = \sigma^\ell - \sigma_0 * (\partial\sigma^\ell)$$

(2) $K = \langle b \rangle$ とするとき、 $\langle b \rangle * L$ のチェイン複体のホモロジー群を求めよ。

問題 1 2 - 4 . K を有限単体複体、 K の頂点集合 V に線形順序が与えられているとすると、 $[0, 1] \times |K|$ の単体複体の構造を定めることができる。すなわち、 $v_i^0 = (0, v_i)$, $v_i^1 = (1, v_i)$ として、 K の k 単体 $\langle v_0 \cdots v_k \rangle$ に対して、 $k + 1$ 個の $k + 1$ 単体 $\langle v_0^0 \cdots v_i^0 v_i^1 \cdots v_k^1 \rangle$ ($i = 0, \dots, k$), $k + 2$ 個の k 単体 $\langle v_0^0 \cdots v_i^0 v_{i+1}^1 \cdots v_k^1 \rangle$ ($i = -1, \dots, k$) を考える。

(1) これらの全体

$$\begin{aligned} & \{ \langle v_0^0 \cdots v_i^0 v_i^1 \cdots v_k^1 \rangle \mid (i = 0, \dots, k), \langle v_0 \cdots v_k \rangle \in K \} \\ & \cup \{ \langle v_0^0 \cdots v_i^0 v_{i+1}^1 \cdots v_k^1 \rangle \mid (i = -1, \dots, k), \langle v_0 \cdots v_k \rangle \in K \} \end{aligned}$$

は単体複体となることを示せ。

(2) $\sigma = \langle v_0 \cdots v_k \rangle$ に対して

$$P\sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \langle v_0^0 \cdots v_i^0 v_i^1 \cdots v_k^1 \rangle$$

と置くと、

$$\partial P\sigma + P\partial\sigma = \langle v_0^1 \cdots v_k^1 \rangle - \langle v_0^0 \cdots v_k^0 \rangle$$

を示せ。

問題 1 2 - 5 . k 次元単体 σ の重心を b_σ とする

($\sigma = \langle v_0 \cdots v_k \rangle$ とするとき、 $b_\sigma = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k v_i$)。

σ をそのすべての面 τ とともに、単体複体 K_σ と見て、頂点の集合を $\{b_\tau \mid \tau \prec \sigma\}$, 面の集合を、 $\{\sigma_{\tau_0 \tau_1 \dots \tau_j} = \langle b_{\tau_0} b_{\tau_1} \dots b_{\tau_j} \rangle \mid \tau_0 \prec \tau_1 \prec \dots \prec \tau_j\}$ としたものを K_σ の重心細分と呼び、 K'_σ と書く。単体複体 K に対し、 K の重心細分 K' が各単体を重心細分したものの和集合として定義される。 $|K'| = |K|$ である。

$[0, 1] \times |K|$ の単体分割 (単体複体の構造) として、 $\{0\} \times K$, $\{1\} \times K'$ を部分複体とするもの L が存在する。

$v_i = (0, v_i)$, $b_\sigma = (1, b_\sigma)$ と略記する。 $[0, 1] \times \sigma$ の単体複体の構造 L_σ を、

$$L_\sigma = \langle b_\sigma \rangle * K_\sigma \cup \bigcup_{i=0}^k L_{\partial_i \sigma}$$

とおく。但し、 $\partial_i \langle v_0 \cdots v_k \rangle = \langle v_0 \cdots v_{i-1} v_{i+1} \cdots v_k \rangle$ である。このとき、 $\bigcup_{\sigma \in K} L_\sigma$ が

求める $[0, 1] \times |K|$ の単体分割である。

(1) $L(K_{\sigma^0})$, $L(K_{\sigma^1})$, $L(K_{\sigma^2})$ を図示せよ。

(2) $\text{bsd} : C_*(K) \rightarrow C_*(L)$ を $\text{bsd}\langle v \rangle = \langle b_v \rangle$, $\dim \sigma \geq 1$ に対し $\text{bsd}(\sigma) = \langle b_\sigma \rangle * (\text{bsd}(\partial\sigma))$ で定義する。 $\text{BSD} : C_*(K) \rightarrow C_{*+1}(L)$ を $\text{BSD}\langle v \rangle = -\langle b_v \rangle * \langle v \rangle$, $\dim \sigma \geq 1$ に対し $\text{BSD}(\sigma) = -\langle b_\sigma \rangle * (\text{BSD}(\partial\sigma) + \sigma)$ で定義する。

このとき、 $\partial \text{BSD}\sigma + \text{BSD}\partial\sigma = \text{bsd}\sigma - \sigma$ を示せ。