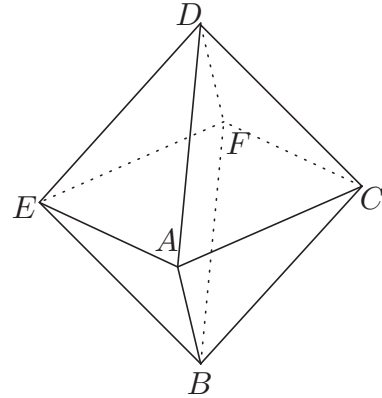
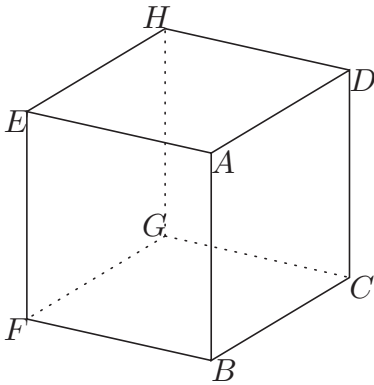


2009年度幾何学特別演習II 問題 1月27日

演習問題13-1. 立方体の頂点に下の左の図のように名前をつける。Xをこの立方体から、対面をアフィン写像 $EFGH \mapsto BCDA$, $DHGC \mapsto EFBA$, $BCGF \mapsto DHEA$ により同一視して得られる空間とする。Xのホモロジー群を求めよ。余力があれば、Xの基本群を求めよ。



演習問題13-2. 正8面体の頂点に上の右の図のように名前をつける。Yをこの正8面体から、対面をアフィン写像 $ABC \mapsto DEF$, $ACD \mapsto EBF$, $ADE \mapsto BCF$, $AEB \mapsto CDF$ により同一視して得られる空間とする。Yのホモロジー群を求めよ。余力があれば、Xの基本群を求めよ。

ユークリッド空間内の単体複体 K の単体 σ のスター $\text{Star}(\sigma)$ (星状体) を σ をフェイスとする単体の和集合 $\text{Star}(\sigma) = \bigcup_{\sigma \prec \tau} \tau$ とする。オープン・スター (開星状体) $O(\sigma)$

を σ をフェイスとする単体の内部の和集合 $O(\sigma) = \bigcup_{\sigma \prec \tau} \text{Int}(\tau)$ とする。

問題13-3. スター、オープン・スターの次の性質を示せ。

$$(1) \text{Star}(\langle v_0 \dots v_k \rangle) = \bigcap_{i=0}^k \text{Star}(v_i).$$

(これは右辺が空でなければ、左辺の k 単体が存在し、等号が成立するという意味でも正しい。)

(2) $\text{Star}(\sigma)$ の任意の点 p と σ 上の任意の点 q を結ぶ線分 $(1-t)p + tq$ ($t \in [0, 1]$) が定義できる。

(3) オープン・スター (開星状体) $O(\sigma)$ は K の実現 $|K|$ の開集合である。

ヒント: K を K の頂点の集合が基底ベクトルであるようなユークリッド空間に実現し、 $O(\sigma)$ を定義する不等式を書けばよい。

問題 1 3 - 4 . 有限単体複体 K_1, K_2 の頂点の集合を $V(K_1), V(K_2)$ とする. $g : |K_1| \rightarrow |K_2|$ が連続写像で、 K_1 の頂点 v のスターの像 $g(\text{Star}(v))$ が K_2 のある頂点 $f_V(v)$ のスターに含まれるとする.

(1) $f_V : V(K_1) \rightarrow V(K_2)$ は単体写像を定義することを示せ.

ヒント: $\text{Star}(v) \subset g^{-1}(\text{Star}(f_V(v)))$ と K_1 の単体 $\langle v_0 \dots v_k \rangle$ に対して、 $\bigcap_{i=0}^k \text{Star}(v_i) \neq \emptyset$ であることを使う.

(2) f_V の実現 f と g はホモトピックであることを示せ.

(3) $f_V^0, f_V^1 : V(K_1) \rightarrow V(K_2)$ について、 $g(\text{Star}(v)) \subset \text{Star}(f_V^0(v)) \cap \text{Star}(f_V^1(v))$ が成立するとき、 K_1 の単体 $\langle v_0 \dots v_k \rangle$ に対して、 $\{f_V^0(v_0), \dots, f_V^0(v_k), f_V^1(v_0), \dots, f_V^1(v_k)\}$ は、 K_2 の 1 つの単体の頂点の集合となることを示せ.

(4) 1 月 1 4 日の問題 1 2 - 4 で与えた $[0, 1] \times K_1$ の単体分割 $K_{[0,1] \times K_1}$ を用いて、 $F_V : V(K_{[0,1] \times K_1}) \rightarrow V(K_2)$ を $F(v_i^0) = f_V^0(v_i), F(v_i^1) = f_V^1(v_i)$ と定義すると F_V は単体写像 $F : K_{[0,1] \times K_1} \rightarrow K_2$ を定めることを示せ.

(5) 単体写像 $f^0, f^1 : K_1 \rightarrow K_2$ に対し、 $i^0 : K_1 \rightarrow \{0\} \times K_1 \subset [0, 1] \times K_1$, $i^1 : K_1 \rightarrow \{1\} \times K_1 \subset [0, 1] \times K_1$ とすると、 $f^0 = F \circ i^0, f^1 = F \circ i^1$ である。チェイン写像 $f_*^0, f_*^1 : C_*(K_1) \rightarrow C_*(K_2)$ に対し、 $F_* \circ P : C_*(K_1) \rightarrow C_*(K_2)$ は $f_*^1 - f_*^0 = \partial(F_* \circ P) + (F_* \circ P)\partial$ を満たすことを示せ。この結果、 $f_*^1 = f_*^0 : H_*(K_1) \rightarrow H_*(K_2)$ を示せ。

問題 1 3 - 5 . X を 2 次元有限胞複体とし、 X の頂点はただ 1 つであるとする。すなわち、

$$X = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup \dots \cup e_\ell^1 \cup e_1^2 \cup e_2^2 \cup \dots \cup e_m^2.$$

このとき次を示せ.

(1) $\pi_1(X, e_0) = \langle e_\lambda^1; \lambda = 1, \dots, \ell : \partial e_\mu^2; \mu = 1, \dots, m \rangle$

但し、 e_λ^1 ($\lambda = 1, \dots, \ell$) は生成元であり、 ∂e_μ^2 は、 e_μ^2 の attaching map

$$S^1 = \partial D^2 \rightarrow X^{(1)} = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup \dots \cup e_\ell^1$$

のホモトピー類が定める $\pi_1(X^{(1)}, e_0)$ の元 (の共役類) をあらわす word である.

(2) $H_1(X; \mathbf{Z}) = \left(\bigoplus_{\lambda=1}^{\ell} \mathbf{Z}e_\lambda^1 \right) / \left(\bigoplus_{\mu=1}^m \mathbf{Z}(\partial e_\mu^2) \right)$

但し、 ∂e_μ^2 は、 e_μ^2 の attaching map $\partial D^2 \rightarrow X^{(1)}$ による、 $H_1(S^1)$ の生成元の $H_1(X^{(1)}, e_0)$ における像である.

問題 1 3 - 6 . M を \mathbf{R}^2 の x 軸と y 軸の和集合とする. $M \times M - \Delta M$ のホモロジー群を求めよ. 但し、 $\Delta M = \{(x, y) \in M \times M \mid x = y\}$.

ヒント: $M \times M$ は、平面の第一象限を 16 枚貼り合わせて得られる図形である。その中の 4 枚に ΔM が含まれている。 $M \times M - \Delta M$ の変形レトラクトを構成する。