この章では、まずホモロジー理論の公理を述べる。すべての位相空間、空間対に対して、この公理を満たすホモロジー理論が存在することは、第∗章で特異ホモロジー理論を定義して、この公理を満たすことを示すことにより示される。しかし、ホモロジー群の計算は公理を知ればすぐにできることが多い。そこで、ホモロジー理論の公理を説明して、容易に導かれる計算をおこなうことがこの章の目的である。

6 ホモロジー理論の公理

6.1 完全系列

群の完全系列については、説明しているが、今後、ホモロジー群の計算のために特に必要なので、アーベル群の完全系列について説明する。

定義 6.1 (完全系列) アーベル群 A_k $(k = 0, \ldots, n)$ と準同型 $h_k : A_k \longrightarrow A_{k+1}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ からなる系列 $A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \xrightarrow{h_1} \cdots \xrightarrow{h_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} A_n$ が完全系列であるとは $\ker(h_j) = \mathrm{im}(h_{j-1})$ が任意の整数 $j = 1, \ldots n-1$ に対して成立することである。アーベル群 A_k と準同型 $h_k : A_k \longrightarrow A_{k+1}$ の無限列に対しても、完全系列であることは、$\ker(h_j) = \mathrm{im}(h_{j-1})$ が定義されているところで成立することとする。

準同型は $A_{k-1} \xleftarrow{h_k} A_k$ の方向のこともある。

【例 6.2】 次のことは ker, im の定義、商の群の定義からわかる。

(0) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{h} B$ が完全系列であることと、h が単射準同型であることは同値である。$A \xrightarrow{h} B \longrightarrow 0$ が完全系列であることと、h が全射準同型であることは同値である。

(1) $0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$ が完全系列ならば $A \cong 0$ である。

(2) $0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \longrightarrow 0$ が完全系列ならば、h_0 は同型写像 $A_0 \cong A_1$ である。

(3) $0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \xrightarrow{h_1} A_2 \longrightarrow 0$ が完全系列ならば $A_2 \cong A_1/h_0(A_0)$ である。

【問題 6.3】 $0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \xrightarrow{h_1} \boldsymbol{Z}^k \longrightarrow 0$ が完全系列ならば $A_1 \cong A_0 \oplus \boldsymbol{Z}^k$ を示せ。解答例は、42 ページ。

定義 6.4 2 つの完全系列 $A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \xrightarrow{h_1} \cdots \xrightarrow{h_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} A_n$, $A'_0 \xrightarrow{h'_0} A'_1 \xrightarrow{h'_1} \cdots \xrightarrow{h'_{n-2}} A'_{n-1} \xrightarrow{h'_{n-1}} A'_n$ の間の準同型とは、準同型 $f_k : A_k \longrightarrow A'_k$ $(k = 0, \ldots, n)$ で、$h'_k \circ f_k = f_{k+1} \circ h_k$ を満たすもののことである。

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "h_0"] \arrow[d, "f_0"] & A_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "f_1"] & \cdots \arrow[r, "h_{n-2}"] & A_{n-1} \arrow[r, "h_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & A_n \arrow[d, "f_n"] \\
A'_0 \arrow[r, "h'_0"] & A'_1 \arrow[r, "h'_1"] & \cdots \arrow[r, "h'_{n-2}"] & A'_{n-1} \arrow[r, "h'_{n-1}"] & A'_n
\end{tikzcd}$$

【問題 6.5】 (ファイブ・レンマ) 2 つの完全系列 $A_1 \xrightarrow{h_1} A_2 \xrightarrow{h_2} A_3 \xrightarrow{h_3} A_4 \xrightarrow{h_4} A_5$, $A'_1 \xrightarrow{h'_1} A'_2 \xrightarrow{h'_2} A_3 \xrightarrow{h'_3} A'_4 \xrightarrow{h'_4} A'_5$ の間の準同型 f_k :

$A_k \longrightarrow A'_k$ $(k = 1, \ldots, 5)$ について f_1, f_2, f_4, f_5 が同型写像ならば f_3 も同型写像であることを示せ。

【解】

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "h_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "h_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
A'_1 \arrow[r, "h'_1"] & A'_2 \arrow[r, "h'_2"] & A'_3 \arrow[r, "h'_3"] & A'_4 \arrow[r, "h'_4"] & A'_5
\end{tikzcd}
$$

について、まず f_3 が単射であることを示す。$f_3(x_3) = 0$ とすると、$0 = h'_3(f_3(x_3)) = f_4(h_3(x_3))$ で、f_4 は同型だから、$h_3(x_3) = 0$ を得る（　）。上側の系列の完全性から $x_2 \in A_2$ で $x_3 = h_2(x_2)$ となるものがある（　）。ここで、$h'_2(f_2(x_2)) = f_3(h_2(x_2)) = 0$ だから、下側の系列の完全性から $y_1 \in A'_1$ で、$h'(y_1) = f_2(x_2)$ となるものがある（　）。さらに、f_1 は同型だから $x_1 \in A_1$ で $f_1(x_1) = y_1$ となるものがある（　）。ここで $f_2(x_2) = h'_1(f_1(x_1)) = f_2(h_1(x_1))$ で、f_2 は同型だから、$h_1(x_1) = x_2$ である。従って、$x_3 = h_2(x_2) = h_2(h_1(x_1)) = 0$ となる。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & \longmapsto & x_2 & \longmapsto & x_3 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
y_1 & \longmapsto & f_2(x_2) & \longmapsto & \underset{\text{仮定}}{0} & \longmapsto & 0 & \longmapsto &
\end{array}
$$

全射であることは次のように示される。$y_3 \in A'_3$ について、f_4 が同型だから、$x_4 = {f_4}^{-1}h'_3(y_3) \in A_4$ をとる（　）。f_5 が同型であることと、下側の系列の完全性から、$h_4(x_4) = {f_5}^{-1}h'_4 f_4(x_4) = {f_5}^{-1}h'_4 h'_3(y_3) = 0$ だから、$x_3 \in A_3$ で $h_3(x_3) = x_4$ となるものがある（　）。$y_3 - f_3(x_3)$ について考える（　）。$h'_3(y_3 - f_3(x_3)) = h'_3(y_3) - h'_3(f_3(x_3)) = h'_3(y_3) - f_4(h_3(x_3)) = h'_3(y_3) - f_4(x_4) = 0$ だから、下側の系列の完全性から、$y_2 \in A'_2$ で、$h'_2(y_2) = y_3 - f_3(x_3)$ となるものがある（　）。$x_2 = {f_2}^{-1}(y_2)$ とおく（　）。ここで、$x_3 + h_2(x_2)$ をとると、

$$
\begin{aligned}
f_3(x_3 + h_2(x_2)) &= f_3(x_3) + f_3(h_2(x_2)) = f_3(x_3) + h'_2(f_2(x_2)) \\
&= f_3(x_3) + y_3 - f_3(x_3) = y_3
\end{aligned}
$$

となる。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & x_2 & \longmapsto & h_2(x_2) & & & & \\
 & \longmapsto & & & x_3 & \longmapsto & x_4 & \longmapsto & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \longmapsto & & & y_3 & \longmapsto & h'_3(y_3) & \longmapsto & 0 \\
 & & y_2 & \longmapsto & y_3 - f_3(x_3) & \longmapsto & 0 & &
\end{array}
$$

6.2　公理

まず、ホモロジー理論とは、空間対 (X, A), 非負整数 n に対して、$H_n(X, A)$ というアーベル群がを対応させ、空間対の間の連続写像 $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ に対して、準同型写像 $f_* : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B)$ を対応させる対応であり、次の公理を満たす。$A = \emptyset$ の空間対 $(X, \emptyset)$ を空間 X と考え、$H_n(X, \emptyset)$ を $H_n(X)$ と書く。まず、名前を並べておく。

(F)　この対応は共変関手である。

(H) この対応はホモトピー公理を満たす。

(P) 対の完全系列が存在する。この対の完全系列への対応も共変関手となる。

(E) 切除公理を満たす。

(D) 次元公理を満たす。

これらを順に説明しよう。

- (F) 共変関手 (covariant functor)。

  「この対応は共変関手である」とは次のことである。

  (1) 空間対の間の連続写像 $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$, $g:(Y,B)\longrightarrow(Z,C)$ に対し、その結合 $g\circ f:(X,A)\longrightarrow(Z,C)$ に対応する $(g\circ f)_*:H_n(X,A)\longrightarrow H_n(Z,C)$ について、$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$ が成立する。ここで、$f_*:H_n(X,A)\longrightarrow H_n(Y,B)$, $g_*:H_n(Y,B)\longrightarrow H_n(Z,C)$ である。

  (2) 空間対 (X,A) の恒等写像 $\mathrm{id}_X:(X,A)\longrightarrow(X,A)$ に対して、$(\mathrm{id}_X)_*=\mathrm{id}_{H_n(X,A)}:H_n(X,A)\longrightarrow H_n(X,A)$ である。

  関手性により、(X,A), (Y,B) が同相ならば、各 n についてホモロジー群 $H_n(X,A)$, $H_n(Y,B)$ は同型である。

- (H) ホモトピー公理 (homotopy axion, homotopy invariance).

  「この対応はホモトピー公理を満たす」とは、$f_0, f_1:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ がホモトピックであるとき、$(f_0)_*=(f_1)_*:H_n(X,A)\longrightarrow H_n(Y,B)$ となることである。

  この結果、(X,A) と (Y,B) がホモトピー同値ならば、各 n についてホモロジー群 $H_n(X,A)$, $H_n(Y,B)$ は同型である。

- (P) 対の完全系列 (long exact sequence for space pair)。

  対の完全系列は以下のものである。

  空間対 (X,A) に対して連結準同型と呼ばれる準同型 $\partial_*:H_n(X,A)\longrightarrow H_{n-1}(A)$ が定まり、次の列が完全系列となる。

$$
\begin{array}{lllll}
 & & \cdots & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(X,A) \\
\xrightarrow{\partial_*} H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X,A) \\
\xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(X,A) \\
\xrightarrow{\partial_*} H_{n-2}(A) & \xrightarrow{i_*} & \cdots & & \\
 & & \cdots & \xrightarrow{j_*} & H_2(X,A) \\
\xrightarrow{\partial_*} H_1(A) & \xrightarrow{i_*} & H_1(X) & \xrightarrow{j_*} & H_1(X,A) \\
\xrightarrow{\partial_*} H_0(A) & \xrightarrow{i_*} & H_0(X) & \xrightarrow{j_*} & H_0(X,A) \longrightarrow 0
\end{array}
$$

  ここで、$i:A\longrightarrow X$ は包含写像、$j:X=(X,\emptyset)\longrightarrow(X,A)$ である。連結準同型は、空間対の間の連続写像 $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ に対して、$\partial_*\circ f_*=\partial_*\circ(f|A)_*$ を満たし、空間対の間の連続写像に、完全系列の間の準同型が対応する。

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\xrightarrow{\partial_*} & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X,A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} \\
& \Big\downarrow{\scriptstyle (f|A)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (f|A)_*} & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_n(B) & \xrightarrow{i_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y,B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(B) & \xrightarrow{i_*}
\end{array}
$$

- (E) 切除公理 (excision axiom).

  切除公理は次のものである（A, B の条件については、特異ホモロジー理論で満たされるもっと緩やかなものを採用することも多い)。

  $X \supset A \supset B$, A は開集合、B は閉集合とする。このとき、包含写像 $\iota : (X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow (X,A)$ に同型 $\iota_* : H_n(X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow H_n(X,A)$ が対応する。

- (D) 次元公理 (dimension axiom).

  次元公理とは次のものである。

  １点 p からなる位相空間 $\{p\}$ に対して、$H_n(\{p\}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (n=0) \\ 0 & (n>0) \end{cases}$ である。ここでは、同型も一意に定まっている、すなわち、$\boldsymbol{Z}$ の生成元 $\mathbf{1}$ が定まっているとする。

6.3 公理の帰結

多くの空間 (X,A) に対して，計算は上の性質だけからでもできる。

【例 6.6】 $H_n(X,X) \cong H_n(\emptyset,\emptyset) = H_n(\emptyset) \cong 0$ $(n \geqq 0)$.

空間対 (X,X) に対して、切除公理を用いれば、$H_n(X,X) \cong H_n(\emptyset,\emptyset) = H_n(\emptyset)$ である。対の完全系列、

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \cdots & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(X,X) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_n(X) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X,X) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(X) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(X,X) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-2}(X) & \xrightarrow{i_*} & \cdots & &
\end{array}
$$

であるが、$i_* = (\mathrm{id}_X)_*$ で、関手性から、$(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{H_n(X)}$ であるから、∂_*, j_* はともに零準同型であり、$H_n(X,X) \cong 0$ となる。従って、$H_n(\emptyset) \cong 0$ である。

【例 6.7】 位相空間 X が 1 点 $\{p\}$ とホモトピー同値ならば、ホモトピー公理と次元公理から、$H_n(X) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (n=0) \\ 0 & (n>0) \end{cases}$ となる。このとき、任意の写像 $c : \{p\} \longrightarrow X$ は、同型写像 $\boldsymbol{Z} \cong H_0(\{p\}) \longrightarrow H_0(X) \cong \boldsymbol{Z}$ を導く。$x \in X$ に対して $c_x : \{p\} \longrightarrow X$ を x を値とする定値写像とすると、c_x は互いにホモトピックであるから、$\langle x \rangle = (c_x)_*(\mathbf{1})$ は $H_0(X)$ の同じ元である。この元を $H_0(X) \cong \boldsymbol{Z}$ の $\mathbf{1}$ に対応する生成元とすることにする。

【問題 6.8】 $X = X_1 \cup X_2$, X_1, X_2 は開集合とすると、各 n に対して $H_n(X) \cong H_n(X_1) \oplus H_n(X_2)$ を示せ。解答例は 42 ページ。

【問題 6.9】 空でない位相空間 X の 0 次元のホモロジー群 $H_0(X)$ から、$\boldsymbol{Z}$ に全射が存在することを示せ。解答例は 42 ページ。

切除公理を用いるときに、次の例題のように閉部分集合についての空間対

から、開集合を取り除いても良い場合を考えておくと良い。

【問題 6.10】 $X \supset A \supset V$, A は閉集合、V は開集合とする。$X \supset U \supset A$ となる開集合 U と、ホモトピー $f_t : X \setminus V \longrightarrow X \setminus V$ $(t \in [0,1])$ で、$f_0 = \mathrm{id}_{X\setminus V}$, $f_1(U \setminus V) \subset A \setminus V$, $f_t|(A \setminus V) = \mathrm{id}_{A\setminus V}$, $f_t(U \setminus V) \subset U \setminus V$ $(t \in [0,1])$ を満たすものが存在すると仮定する（特に $A \setminus V$ は $U \setminus V$ の変形レトラクトである）。このとき、包含写像 $(X \setminus V, A \setminus V) \longrightarrow (X, A)$ は、同型写像 $H_*(X \setminus V, A \setminus V) \cong H_*(X, A)$ を誘導することを示せ。

【解】 まず、$\widetilde{f_t} : X \longrightarrow X$ を、$X = (X \setminus V) \cup A$ と考えて、$\widetilde{f}|(X \setminus V) = f_t$, $\widetilde{f_t}|A = \mathrm{id}_A$ により定める。これは、X の閉集合 $X \setminus V$, A 上で連続で、$(X \setminus V) \cap A = A \setminus V$ 上 $\mathrm{id}_{A\setminus V}$ で一致しているから、連続写像として矛盾なく定義されている。

この $\widehat{f_1}$ は、$\widehat{f_1}(U) = f_1(U \setminus V) \cup f_1(V) \subset (A \setminus V) \cup V \subset A$ をみたし、空間対の連続写像 $\widehat{f_1} : (X, U) \longrightarrow (X, A)$ を定める。

包含写像 $i_X : (X, A) \longrightarrow (X, U)$ は、$\widehat{f_1} : (X, U) \longrightarrow (X, A)$ をホモトピー逆写像とするホモトピー同値写像であることを示す。実際、$\widehat{f_1} \circ i_X : (X, A) \longrightarrow (X, A)$ に対し、$\widehat{f_t} : (X, A) \longrightarrow (X, A)$ であり、$\widehat{f_1} \circ i_X = \widehat{f_1}$, $\widehat{f_0} = \mathrm{id}_X$ だから、$\widehat{f_1} \circ i_X \simeq \mathrm{id}_X : (X, A) \longrightarrow (X, A)$ である。また、$i_X \circ \widehat{f_1} : (X, U) \longrightarrow (X, U)$ について、$\widehat{f_t}(U) = \widehat{f_t}(U \setminus V) \cup \widehat{f_t}(V) \subset (U \setminus V) \cup V \subset U$ で、$i_X \circ \widehat{f_1} = \widehat{f_1}$, $\widehat{f_0} = \mathrm{id}_X$ だから、$i_X \circ \widehat{f_1} \simeq \mathrm{id}_X : (X, U) \longrightarrow (X, U)$ である。従って、同型 $(i_X)_* : H_*(X, A) \cong H_*(X, U)$ が誘導される。

次に包含写像 $i_{X\setminus V} : (X \setminus V, A \setminus V) \longrightarrow (X \setminus V, U \setminus V)$ も、ホモトピー同値写像である。$f_t(U \setminus V) \subset U \setminus V$, $f_1(U \setminus V) \subset A \setminus V$ に注意して、f_1 が、$i_{X\setminus V}$ のホモトピー逆写像であることを示す。$f_1 \circ i_{X\setminus V} : (X \setminus V, A \setminus V) \longrightarrow (X \setminus V, A \setminus V)$ に対し、$f_t : (X \setminus V, A \setminus V) \longrightarrow (X \setminus V, A \setminus V)$ であり、$f_1 \circ i_{X\setminus V} = f_1$, $f_0 = \mathrm{id}_{X\setminus V}$ だから、$f_1 \circ i_{X\setminus V} \simeq \mathrm{id}_{X\setminus V} : (X \setminus V, A \setminus V) \longrightarrow (X \setminus V, A \setminus V)$ である。また、$f_t(U \setminus V) \subset U \setminus V$ で、$i_{X\setminus V} \circ f_1 = f_1$, $f_0 = \mathrm{id}_{X\setminus V}$ だから、$i_X \circ f_1 \simeq \mathrm{id}_{X\setminus V} : (X \setminus V, U \setminus V) \longrightarrow (X \setminus V, U \setminus V)$ である。従って、同型 $(i_{X\setminus V})_* : H_*(X \setminus V, A \setminus V) \cong H_*(X \setminus V, U \setminus V)$ が誘導される。

切除公理により、包含写像 $(X \setminus A, U \setminus A) \longrightarrow (X, U)$ は同型 $H_*(X \setminus A, U \setminus A) \longrightarrow H_*(X, U)$ を誘導する。また、$X \setminus V \supset U \setminus V \supset A \setminus V$ において、$U \setminus V$ は $X \setminus V$ の開集合、$A \setminus V$ は $X \setminus V$ の閉集合だから、切除公理により、包含写像 $(X \setminus A, U \setminus A) \longrightarrow (X \setminus V, U \setminus V)$ は同型 $H_*(X \setminus A, U \setminus A) \longrightarrow H_*(X \setminus V, U \setminus V)$ を誘導する。従って、$H_*(X \setminus V, A \setminus V) \cong H_*(X, A)$ となる。この同型が包含写像 $(X \setminus V, A \setminus V) \longrightarrow (X, A)$ により誘導されることは、包含写像の間の可換図式

$$\begin{tikzcd}
(X \setminus V, A \setminus V) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & (X, A) \arrow[d, "\simeq"] \\
(X \setminus V, U \setminus V) & (X, U) \\
(X \setminus A, U \setminus A) \arrow[u, "\cong_{H_*}"] \arrow[r, "\cong_{H_*}"'] & (X, U) \arrow[u, "="']
\end{tikzcd}$$

がホモロジー群の間に引き起こす同型写像の可換図式からわかる。

【問題 6.11】 $D^n = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq 1\}$, $S^{n-1} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ とし、M^n を n 次元多様体とする。$\iota : D^n \longrightarrow M^n$ を、像への微分同相写像とする。すなわち、$D^n \subset \boldsymbol{R}^n$ を含む開集合 U からの微分同相写像 $\widehat{\iota}$ の D^n への制限となる写像とする。このとき、$H_*(D^n, S^{n-1}) \cong H_*(M^n, M^n \setminus \mathrm{Int}(D^n))$

を示せ。解答例は 42 ページ。

7　球面の次元とホモロジー群

7.1　球面のホモロジー群

この小節では、次を示す。

命題 7.1 $n \geqq 1$ に対して、$D^n = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq 1\}$, $S^{n-1} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ とする。このとき、

$$H_k(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (k = n) \\ 0 & (k \neq n) \end{cases}, \qquad H_k(S^n) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (k = 0,\ n) \\ 0 & (k \neq 0,\ n) \end{cases}$$

2 点 S^0 のホモロジー群については、問題 6.8 により、$H_*(S^0) \cong H_*(\{-1\}) \oplus H_*(\{1\})$, すなわち、$H_k(S^0) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} & (k = 0) \\ \quad 0 & (k > 0) \end{cases}$ がわかっている。

命題 7.1 の証明は次元の低いものから順に決めることで行われる。

最初に $(D^1, S^0) = ([-1, 1], \{-1, 1\})$ を考える。空間対 $([-1, 1], \{-1, 1\})$ の完全系列を書く。

$$\begin{array}{l}
\xrightarrow{\partial_*} H_2(\{-1,1\}) \xrightarrow{i_*} H_2([-1,1]) \xrightarrow{j_*} H_2([-1,1],\{-1,1\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} H_1(\{-1,1\}) \xrightarrow{i_*} H_1([-1,1]) \xrightarrow{j_*} H_1([-1,1],\{-1,1\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} H_0(\{-1,1\}) \xrightarrow{i_*} H_0([-1,1]) \xrightarrow{j_*} H_0([-1,1],\{-1,1\}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

について、例 6.7 により、$H_k([-1, 1]) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (k = 0) \\ 0 & (k > 0) \end{cases}$ だから、わかっている群を書くと以下の完全系列を得る。

$$\begin{array}{lclclcl}
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_2([-1,1],\{-1,1\}) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_1([-1,1],\{-1,1\}) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} & H_0([-1,1],\{-1,1\}) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

この完全系列から $H_k([-1, 1], \{-1, 1\}) \cong 0$ $(k \geqq 2)$ がわかる。

例 6.7 の可縮な空間の H_0 の生成元の決め方により、$i_*(n_1, n_2) = n_1 + n_2$ がわかる。従って

$$H_0([-1, 1], \{-1, 1\}) \cong \mathbf{0}, \quad H_1([-1, 1], \{-1, 1\}) \cong \boldsymbol{Z}.$$

これが、命題 7.1 の (D^1, S^0) の場合である。

同型 $H_1([-1, 1], \{-1, 1\}) \cong \boldsymbol{Z}$ の定め方、すなわち $H_1([-1, 1], \{-1, 1\})$ の生成元のとりかたは、$m \in \boldsymbol{Z} \cong H_1([-1, 1], \{-1, 1\})$ に対し、$\partial_* m = (m, -m)$ とするものと、$\partial_* m = (-m, m)$ とするものの 2 通りある。この一方を定めることは $[-1, 1]$ に向きを定めることである。通常 $\overrightarrow{[-1, 1]}$ という向きを定めており、$H_1([-1, 1], \{-1, 1\}) = H_1(D^1, S^0)$ の生成元を $[D^1, S^0]$ とするとき、

$$\partial_*[D^1, S^0] = \langle 1 \rangle - \langle -1 \rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{Z}\langle -1 \rangle \oplus \boldsymbol{Z}\langle 1 \rangle = H_0(\{-1, 1\})$$

と向きをつける。

さて、$S^1=\{(x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2 \mid {x_1}^2+{x_2}^2=1\}$ のホモロジー群を計算しよう。$S^1_+=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in S^1 \mid x_1\geqq 0\}$, $S^1_-=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in S^1 \mid x_1\leqq 0\}$ とする。

空間対 (S^1,S^1_-) のホモロジー完全系列は次のようになる。

$$\begin{array}{l}
\xrightarrow{\partial_*} H_2(S^1_-) \xrightarrow{i_*} H_2(S^1) \xrightarrow{j_*} H_2(S^1,S^1_-)\\
\xrightarrow{\partial_*} H_1(S^1_-) \xrightarrow{i_*} H_1(S^1) \xrightarrow{j_*} H_1(S^1,S^1_-)\\
\xrightarrow{\partial_*} H_0(S^1_-) \xrightarrow{i_*} H_0(S^1) \xrightarrow{j_*} H_0(S^1,S^1_-) \longrightarrow 0
\end{array}$$

ここで、切除公理（問題 6.11）から $H_1(S^1,S^1_-)\cong H_1(S^1_+,\partial S^1_+)$, また、写像 $(S^1_+,\partial S^1_+)\longrightarrow(D^1,S^0)$ を $(x_1,x_2)\longmapsto x_2$ により定めると、これは同相であるから、$H_1(S^1_+,\partial S^1_+)\cong H_1(D^1,S^0)$ となる。従って次の完全系列を得る。

$$\begin{array}{cccccccc}
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_2(S^1) & \xrightarrow{j_*} & 0 & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_1(S^1) & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^1) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

この完全系列から $H_k(S^1)\cong 0$ $(k\geqq 2)$ がわかる。

$\partial_*\,:\,H_1(S^1,S^1_-)\longrightarrow H_0(S^1_-)$ を調べるために包含写像 $(S^1_+,\partial S^1_+)\longrightarrow(S^1,S^1_-)$ が誘導する $(S^1_+,\partial S^1_+)$ の完全系列と (S^1,S^1_-) の完全系列の間の写像を見る。$\partial S^1_+=\{b_-,b_+\}$ $(b_\pm=(0,\pm1))$ として、$\partial_*[S^1_+,\partial S^1_+]=\langle b_+\rangle-\langle b_-\rangle$ となっている。例 6.7 により、$\langle b_+\rangle$, $\langle b_-\rangle$ は包含写像 $\partial S^1_+\longrightarrow S^1_-$ によって $H_0(S^1_-)$ の同じ生成元に写る。従って、$\partial_*[S^1_+,\partial S^1_+]$ は 0 に写るから、∂_* は零写像となる。

$$\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{Z} & \xrightarrow{(-1,1)} & \boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z}\\
H_1(S^1_+,\{b_-,b_+\}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_0(\{b_-,b_+\}) & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^1_+)\\
\downarrow\cong & & \downarrow & & \\
H_1(S^1,S^1_-) & \xrightarrow{\partial_*} & H_0(S^1_-) & & \\
\boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & &
\end{array}$$

従って、$H_1(S^1)\cong\boldsymbol{Z}$, $H_0(S^1)\cong\boldsymbol{Z}$ が得られる。これが命題 7.1 の S^1 の場合である。ここで、$H_0(S^1)$ の生成元は、可縮な $H_0(S^1_-)$ の生成元の像であるから $x\in S^1$ について $H_0(\{x\})$ の生成元 $\langle x\rangle$ の像である。あるいは、定値写像 $c_x\,:\,\{p\}\longrightarrow S^1$ について $(c_x)_*1$ である。$H_1(S^1)$ の生成元 $[S^1]$ は $j_*[S^1]=[S^1,S^1_-]\longleftarrow\!\!\mid[S^1_+,\partial S^1_+]$ により定まっている。

次に (D^2,S^1) を考えよう。ホモロジー完全系列を書き、わかっているところを書き換えると以下のようになる。

$$\begin{array}{l}
\xrightarrow{\partial_*} H_2(S^1) \xrightarrow{i_*} H_2(D^2) \xrightarrow{j_*} H_2(D^2,S^1)\\
\xrightarrow{\partial_*} H_1(S^1) \xrightarrow{i_*} H_1(D^2) \xrightarrow{j_*} H_1(D^2,S^1)\\
\xrightarrow{\partial_*} H_0(S^1) \xrightarrow{i_*} H_0(D^2) \xrightarrow{j_*} H_0(D^2,S^1) \longrightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_2(D^2,S^1) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_1(D^2,S^1) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} & H_0(D^2,S^1) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$H_0(S^1)$ と $H_0(D^2)$ の生成元は、ともに任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であるから、$H_0(S^1)\xrightarrow{i_*}H_0(D^2)$ は同型であり、この完全系列から $H_k(D^2,S^1)\cong\boldsymbol{Z}$ $(k=2)$, $H_k(D^2,S^1)\cong 0$ $(k\neq 2)$ がわかる。このとき、$H_2(D^2,S^1)$ の生成元 $[D^2,S^1]$ は、$\partial_*[D^2,S^1]=[S^1]\in H_1(S^1)$ と定める。

次に $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1\}$ のホモロジー群を計算する。$S^2_+ = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_1 \geqq 0\}$, $S^2_- = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_1 \leqq 0\}$ とする。

空間対 (S^2, S^2_-) のホモロジー完全系列は次のようになる。

$$\begin{array}{l}
\xrightarrow{\partial_*} H_2(S^2_-) \xrightarrow{i_*} H_2(S^2) \xrightarrow{j_*} H_2(S^2, S^2_-) \\
\xrightarrow{\partial_*} H_1(S^2_-) \xrightarrow{i_*} H_1(S^2) \xrightarrow{j_*} H_1(S^2, S^2_-) \\
\xrightarrow{\partial_*} H_0(S^2_-) \xrightarrow{i_*} H_0(S^2) \xrightarrow{j_*} H_0(S^2, S^2_-) \longrightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_2(S^2) & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_1(S^2) & \xrightarrow{j_*} & 0 & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^2) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

下の列は上の列のわかっているところを書いたものである。ここで、切除公理（問題 6.11）から $H_k(S^2, S^2_-) \cong H_k(S^2_+, \partial S^2_+)$ $(k \geqq 0)$, また、写像 $(S^2_+, \partial S^2_+) \longrightarrow (D^2, S^1)$ を、$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_2, x_3)$ により定めると、これは同相であるから、$H_k(S^2_+, \partial S^2_+) \cong H_k(D^2, S^1)$ となることを使っている。この完全系列から $H_k(S^2) \cong \boldsymbol{Z}$ $(k = 0,\ 2)$, $H_k(S^2) \cong 0$ $(k \neq 0,\ 2)$ がわかる。$H_0(S^2)$ の生成元は任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であり、$H_2(S^2)$ の生成元 $[S^2]$ は $j_*[S^2] = [S^2, S^2_-] \longleftrightarrow [S^2_+, \partial S^2_+]$ により定まっている。

これより次元の高いものについての議論は、(D^2, S^1), S^2 の議論と同じである。念のために、書いておくと以下の通りである。

命題 7.1 が n に対して正しいとし、$H_0(S^n)$ の生成元は、任意の定値写像 c_x $(x \in S^n)$ による $H_0(\{p\})$ の生成元の像 $\langle x \rangle = (c_x)_*(\mathbf{1})$ であるとする。

(D^{n+1}, S^n) のホモロジー群について、空間対 (D^{n+1}, S^n) のホモロジー完全系列を書き、わかっているところを書き換えると以下のようになる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & H_{n+2}(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+2}(D^{n+1}, S^n) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n+1}(S^n) & \xrightarrow{i_*} & H_{n+1}(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(D^{n+1}, S^n) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_n(S^n) & \xrightarrow{i_*} & H_n(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_n(D^{n+1}, S^n) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(S^n) & \xrightarrow{i_*} & \cdots & & & & \\
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & H_1(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_1(D^{n+1}, S^n) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_0(S^n) & \xrightarrow{i_*} & H_0(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_0(D^{n+1}, S^n) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_{n+2}(D^{n+1}, S^n) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(D^{n+1}, S^n) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_n(D^{n+1}, S^n) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & \cdots & & & & \\
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_1(D^{n+1}, S^n) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} & H_0(D^{n+1}, S^n) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$H_0(S^n)$ と $H_0(D^{n+1})$ の生成元は、ともに任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であるから、$H_0(S^n) \xrightarrow{i_*} H_0(D^{n+1})$ は同型であり、この完全系列から $H_k(D^{n+1}, S^n) \cong \boldsymbol{Z}$ $(k = n+1)$, $H_k(D^{n+1}, S^n) \cong 0$ $(k \neq n+1)$ がわかる。このとき、$H_{n+1}(D^{n+1}, S^n)$ の生成元 $[D^{n+1}, S^n]$ は、$\partial_*[D^{n+1}, S^n] = [S^n] \in H_n(S^n)$ と定める。

次に $S^{n+1} = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \boldsymbol{R}^{n+2} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ のホモロジー群を計算する。$S^{n+1}_+ = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in S^{n+1} \mid x_1 \geqq 0\}$, $S^2_- = \{\boldsymbol{x} =$

$(x_1, \ldots, x_{n+2}) \in S^{n+1} \mid x_1 \leqq 0\}$ とする。
　空間対 (S^{n+1}, S^{n+1}_-) のホモロジー完全系列は次のようになる。

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & H_{n+2}(S^{n+1}_-) & \xrightarrow{i_*} & H_{n+2}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+2}(S^{n+1}, S^{n+1}_-) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n+1}(S^{n+1}_-) & \xrightarrow{i_*} & H_{n+1}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(S^{n+1}, S^{n+1}_-) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n}(S^{n+1}_-) & \xrightarrow{i_*} & H_{n}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n}(S^{n+1}, S^{n+1}_-) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \cdots & \cdots & & & & & \\
 & & \cdots & \cdots & \xrightarrow{j_*} & H_{1}(S^{n+1}, S^{n+1}_-) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{0}(S^{n+1}_-) & \xrightarrow{i_*} & H_{0}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{0}(S^{n+1}, S^{n+1}_-) & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_{n+2}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & 0 & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_{n+1}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_{n}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & 0 & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \cdots & \cdots & & & & & \\
 & & \cdots & \cdots & \xrightarrow{j_*} & 0 & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & H_{0}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

下の列は上の列のわかっているところを書いたものである。ここで、切除公理（問題 6.11）から $H_k(S^{n+1}, S^{n+1}_-) \cong H_k(S^{n+1}_+, \partial S^{n+1}_+)$ $(k \geqq 0)$, また、写像 $(S^{n+1}_+, \partial S^{n+1}_+) \longrightarrow (D^{n+1}, S^n)$ を、$(x_1, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}) \longmapsto (x_2, \ldots, x_{n+2})$ により定めると、これは同相であるから、$H_k(S^{n+1}_+, \partial S^{n+1}_+) \cong H_k(D^{n+1}, S^n)$ であることを使っている。この完全系列から $H_k(S^{n+1}) \cong \boldsymbol{Z}$ $(k = 0,\ n+1)$, $H_k(S^{n+1}) \cong 0$ $(k \neq 0,\ n+1)$ がわかる。$H_0(S^{n+1})$ の生成元は任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であり、$H_{n+1}(S^{n+1})$ の生成元 $[S^{n+1}]$ は $j_*[S^{n+1}] = [S^{n+1}, S^{n+1}_-] \longleftarrow [S^{n+1}_+, \partial S^{n+1}_+]$ により定まっている。以上により命題 7.1 が証明された。

　上の命題 7.1 の証明では、n 次元球面を 2 つの半球面に分割している。n 次元球面 S^n のステレオグラフ射影を用いて、次のように証明することもできる。この証明でも、例 6.7 の可縮な空間の H_0 の生成元の決め方が、重要であることが分かる。

【問題 7.2】　命題 7.1 の証明と同じように帰納法で $n \geqq 1$ に対して、

$$
H_k(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \smallsetminus \{\boldsymbol{0}\}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (k = n) \\ 0 & (k \neq n) \end{cases}, \qquad H_k(S^n) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (k = 0,\ n) \\ 0 & (k \neq 0,\ n) \end{cases}
$$

を示せ。解答例は 42 ページ。

　球面は次元が異なれば、ホモロジー群が異なることがわかったから、次元の異なる球面は同相ではなく、さらに、ホモトピー同値ではない。１点の補空間を考えることで、次元の異なるユークリッド空間は同相ではないことがわかる。

【問題 7.3】　n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ は、次元が異なれば同相でないことを示せ。解答例は 44 ページ。

【問題 7.4】　n 次元閉球体 D^n と $x \in D^n$ に対し、$H_k(D^n, D^n \setminus \{x\})$ を求めよ。解答例は 45 ページ。

7.2　ブラウアーの不動点定理

ホモロジー群を用いて、各次元の球体はその境界の球面へのレトラクションを持たないことが示される。

命題 7.5 $n \geqq 1$ に対し、$D^n = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \|x\| \leqq 1\}$, $S^{n-1} = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ とするとき、連続写像 $r : D^n \longrightarrow S^{n-1}$ で $r|S^{n-1} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ をみたすものは存在しない。

証明　レトラクション $r : D^n \longrightarrow S^{n-1}$ が存在したとする。$i : S^{n-1} \longrightarrow D^n$ を包含写像とする。$r \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ だから、$(r \circ i)_* = \mathrm{id} : H_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$ である。ここで、$H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (n \geqq 2) \\ \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} & (n = 1) \end{cases}$ である。一方、$(r \circ i)_* = r_* \circ i_*$ において、$i_* : H_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(D^n)$ で $H_{n-1}(D^n) \cong \begin{cases} 0 & (n \geqq 2) \\ \boldsymbol{Z} & (n = 1) \end{cases}$ である。従って、$\mathrm{rank}(r \circ i)_*(H_{n-1}(S^{n-1})) \leqq \begin{cases} 0 & (n \geqq 2) \\ 1 & (n = 1) \end{cases}$ となり、これは $(r \circ i)_* = \mathrm{id}$ と矛盾する。従って、レトラクション r は存在しない。 ■

次の命題は、ブラウアーの不動点定理と呼ばれる。

定理 7.6 (ブラウアーの不動点定理) すべての連続写像 $f : D^n \longrightarrow D^n$ に対し、$f(x) = x$ となる $x \in D^n$ が存在する。

証明　すべての点 x に対し、$f(x) \neq x$ と仮定する。$f(x)$, x を結ぶ直線と、∂D^n の交点のうち、$f(x)$, x を結ぶ線分について x の延長上にあるものをとり、$g(x)$ とおく。$g : D^n \longrightarrow S^{n-1}$ は連続であり、$g|S^{n-1} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ である。従って、g は D^n から S^{n-1} へのレトラクションとなり、命題 7.5 に矛盾する。従って、$f(x) = x$ となる点 $x \in D^n$ が存在する。 ■

7.3　領域不変性（展開）

次の命題を領域不変性定理という。

命題 7.7 $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U と $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 B が同相であるならば、B は $\boldsymbol{R}^n$ の開集合である。

命題 7.7 では、部分集合 B には、誘導位相を考えているが、部分集合への開集合からの同相写像が次元の制限により、局所的に全射となることを述べている。この命題により同相な位相多様体の次元は等しいことがわかる。

証明　$f : U \longrightarrow B$ を同相写像とする。B の点 x に対し、$f^{-1}(x)$ の ε 近傍 V で閉包 $\overline{V}$ が U に含まれるものをとる。$X = f(\partial\overline{V}) \subset \boldsymbol{R}^n$ の補集合の連結成分 U で、x を含むものをとる。

＊＊作業中＊＊

■

補題 7.8 X を n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ のコンパクト集合とする。$a \in \boldsymbol{R}^n \setminus X$ に対し、連続写像 $g_a : X \longrightarrow S^{n-1}$ を $g_a(x) = \dfrac{x-a}{\|x-a\|}$ で定める。U を $\boldsymbol{R}^n \setminus X$ の連結成分とする。U が非有界のとき、$a \in U$ に対し、$g_a : X$ は定値写像にホモトピックである。U が有界のとき、$a \in U$ に対し、$g_a : X$ は定値写像にホモトピックとならない。

証明　$\boldsymbol{R} \setminus X$ は $\boldsymbol{R}^n$ の開集合で、局所連結であるから、その連結成分 U は、連結な開集合である。このとき、$X \cup U$ は、U と異なる連結成分の和集合の補集合だから閉集合である。

また、$\boldsymbol{R}^n$ の開集合は連結ならば弧状連結である。従って、写像 g_a は、a が $\boldsymbol{R}^n \setminus X$ の同じ弧状連結成分 U 上にあるときはホモトピックである。

U が非有界ならば、a を原点を中心とする十分半径が大きな球面上にとったものとホモトピックで、このとき、g_a は、全射ではなく定値写像とホモトピックである。

U が有界のとき、$a \in U$ に対し、$g_a : X$ は定値写像にホモトピックとならない。実際、定値写像 $c_b : X \longrightarrow S^{n-1}$ にホモトピックと仮定しする。$\boldsymbol{R}^n$ の相似変換で、a を原点 $\mathbf{0}$ とし、単位球体 D^n の内部に $X \cup U$ が含まれていると仮定して良い。$g_a = g_{\mathbf{0}}$ である。このとき、$G : [0,1] \times X \longrightarrow S^{n-1}$ をホモトピー $(G(0,x) = b, G(1,x) = g_{\mathbf{0}}(x))$ とする。$[0,1] \times (X \cup U)$ の閉部分集合 $[0,1] \times X$ 上で G, $\{0\} \times (X \cup U)$ 上で定値写像 c_b となる連続写像を考えると、ウリゾンの定理により、その拡張となる連続写像 $\widetilde{G} : [0,1] \times (X \cup U) \longrightarrow S^{n-1}$ が存在する。$\widetilde{G}_1(x) = \widetilde{G}(1,x)$ とおくと、$\widetilde{G}_1 : X \cup U \longrightarrow S^{n-1}$, $\widetilde{G}_1|X = g_{\mathbf{0}}$ である。$F : D^n \longrightarrow S^{n-1}$ を $F|(X \cup U) = \widetilde{G}_1$, $F|(D^n \setminus U) = g_{\mathbf{0}}$ により定義すると、補題 2.9（3 ページ）により連続関数となる。$F|\partial D^n = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ だから、F は、D^n から ∂D^n へのレトラクションとなり、命題 7.5 に矛盾する。従って、$g_a : X$ は定値写像にホモトピックとならない。 ■

8　写像度

前節で計算したように、n 次元球面 S^n $(n \geqq 1)$ に対し、$H_0(S^n) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_n(S^n) \cong \boldsymbol{Z}$ である。連続写像 $f : S^n \longrightarrow S^n$ は準同型 $f_* : H_0(S^n) \longrightarrow H_0(S^n)$, $f_* : H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n)$ を誘導する。

$f_* : H_0(S^n) \longrightarrow H_0(S^n)$ は、標準的な生成元の取り方に対し、$\mathrm{id} : \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ である。実際、$H_0(S^n)$ の生成元は任意の写像 $c_x : \{p\} \longrightarrow S^n$ $(x \in S^n)$ による $H_0(\{p\})$ の生成元 1 の像 $(c_x)_*1$ である。$f \circ c_x = c_{f(x)}$ だから、$f_* : H_0(S^n) \longrightarrow H_0(S^n)$ は、$\mathrm{id} : \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ である。

$f_* : H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n)$ は、生成元 $[S^n]$ の像 $f_*[S^n]$ で定まる。

定義 8.1 連続写像 $f : S^n \longrightarrow S^n$ に対し、$f_*[S^n] = m[S^n]$ で定まる m を f の**写像度** *(degree)* と呼び、$\deg(f)$ で表す。

【問題 8.2】　$n \geqq 1$ に対し、連続写像 $f : S^n \longrightarrow S^n$ が全射でないならば、$\deg\ f = 0$ を示せ。解答例は 45

8.1　円周から円周への写像の写像度

準同型写像 $f_* : H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1)$ の計算は、同型 $H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1, S^1_-)$ をもとに計算する。$S^1 \cong \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ として、特別な写像 $f_m(x) = mx \mod 1$ を定義する。$(f_m)_* = m\times : \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ である。また、任意の $g : S^1 \longrightarrow S^1$ に対し、ある $m \in \boldsymbol{Z}$ について $g \simeq f_m$ となることを示す。

このとき、次の補題を使う。

補題 8.3 空間対 (X, A)、位相空間 Y に対し、像への同相写像 $i : X \longrightarrow Y$, Y の恒等写像 id_Y とホモトピックな Y の同相写像 $f : Y \longrightarrow Y$ が与えられて

いるとする。X の部分集合 A に対し、$i_* : (X, A) \longrightarrow (Y, Y \setminus i(X \setminus A))$ は、ホモロジー群の同型を誘導するとする。このとき、$j_0 : Y \longrightarrow (Y, Y \setminus i(X \setminus A))$, $j_1 = f \circ j_0 : Y \longrightarrow (Y, Y \setminus f(i(X \setminus A)))$ に対し、$i_*{}^{-1} \circ j_{0*} = (f \circ i)_*{}^{-1}(j_1)_* : H_*(Y) \longrightarrow H_*(X, A)$ が成立する。

証明 $f \simeq \mathrm{id}_Y : Y \longrightarrow Y$ だから、$f_* = \mathrm{id}_{H_*(Y)}$ である。

$$\begin{array}{ccccc}
Y & \xrightarrow{j_0} & (Y, Y \setminus i(X \setminus A)) & \xleftarrow{i} & (X, A) \\
\downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow \mathrm{id}_X \\
Y & \xrightarrow{j_1} & (Y, Y \setminus f(i(X \setminus A))) & \xleftarrow{f \circ i} & (X, A)
\end{array}$$

は可換だから、$i_*{}^{-1} \circ j_{0*} = (f \circ i)_*{}^{-1}(j_1)_* : H_*(Y) \longrightarrow H_*(X, A)$ を得る。

■

命題 8.4 整数 m に対し、$f_m : \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ を $f_m(x) = mx \mod 1$ で定めると $\deg(f_m) = m$ である。また、任意の連続写像 $g : \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ に対し、$g \simeq f_m$ となる整数が存在する。従って、$\deg : [S^1, S^1] \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ は全単射である。

証明 (1) $f : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ を $f(x) = -x$ とするとき、$\deg(f : (D^1, S^0) \longrightarrow (D^1, S^0)) = -1$ である。

実際、$[D^1, S^0] \in H^1(D^1, S^0)$ は、$\partial_*[D^1, S^0] = \langle 1 \rangle - \langle -1 \rangle \in H_0(\{-1, 1\})$ で定まっている。$(f|S^0)_*(\langle 1 \rangle - \langle -1 \rangle) = \langle -1 \rangle - \langle 1 \rangle$ であるから、下の図式が可換になるので、$f_*[D^1, S^0] = -[D^1, S^0]$ となる。

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(D^1, S^0) \ni & [D^1, S^0] & \overset{\partial_*}{\longmapsto} & \langle 1 \rangle - \langle -1 \rangle & \in & H_0(\{-1, 1\}) \\
f_* \downarrow & \downarrow f_* & & (f|S^0)_* \downarrow & & \downarrow (f|S^0)_* \\
H^1(D^1, S^0) \ni & -[D^1, S^0] & \underset{\partial_*}{\longmapsto} & \langle -1 \rangle - \langle 1 \rangle & \in & H_0(\{-1, 1\})
\end{array}$$

(2) $\iota : D^1 \longrightarrow S^1$ を像への同相写像とする。

$$H_1(S^1) \xrightarrow{j_*} H_1(S^1, S^1 \setminus \mathrm{Int}(\iota(D^1))) \xleftarrow{\iota_*} H_1(D^1, S^0)$$

について、$\iota_*[D^1, S^0] = \pm j_*[S^1]$ で、$\pm$ は ι が向きを保つとき $+$, 向きを反対にするとき $-$ となる。

ここで、$[S^1] \in H^1(S^1)$ は、$j : S^1 \longrightarrow (S^1, S^1_-)$, $i : (S^1_+, \partial S^1_+) \longrightarrow (S^1, S^1_-)$ について、$j_*[S^1] = [S^1, S^1_-] = i_*[S^1_+, \partial S^1_+] \in H^1(S^1, S^1_-)$ で定まっている。$\iota : D^1 \longrightarrow S^1$ が向きを保つとき、S^1 の同相写像 $f : S^1 \longrightarrow S^1$ で、id_{S^1} とホモトピックであり、$f \circ \iota : D^1 \longrightarrow S^1_+$ が向きを保つ同相写像となるものが存在することを示せば、補題 8.3 により、$\iota_*[D^1, \partial D^1] = j_*[S^1]$ となる。このとき、ι が向きを反対にするときは、(1) により、$\iota_*[D^1, \partial D^1] = -j_*[S^1]$ が得られる。

f の構成は、次のようにする。$\iota(D^1)$ が S^1 の点 $q = (-1, 0)$ を含む場合は、t に連続に依存する円周の回転 $g_t : S^1 \longrightarrow S^1$ で $g_0 = \mathrm{id}_{S^1}$, $g_1(q) \notin \iota(D^1)$ とするホモトピーによって、$\iota(D^1)$ が S^1 の点 $(-1, 0)$ を含まないようにできる。このとき、$s \longmapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$ により、S^1 を $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ と同一視すると、ある正実数により、$\iota(D^1) = [a, b] \subset \big[-\dfrac{1}{2} + \varepsilon, \dfrac{1}{2} - \varepsilon \big] \subset \big[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \big]$ となる。こ

こで、$f_t:\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\longrightarrow\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ を、

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1/4}{a+(1/2)}(x+\dfrac{1}{2})-\dfrac{1}{2} & (x\in\left[-\dfrac{1}{2},a\right])\\ \dfrac{1/2}{b-a}(x-a)-\dfrac{1}{4} & (x\in[a,b])\\ \dfrac{1/4}{(1/2)-b}(x-b)+\dfrac{1}{4} & (x\in\left[b,\dfrac{1}{2}\right])\end{cases}$$

により定義すれば、f は恒等写像とホモトピックである。

(3)　$m\geqq 1$ に対し、${f_m}^{-1}(S^1_+)=J^{(m)}$ とおく。$S^1\cong \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 上では $J^{(m)}=\bigcup_{i=0}^{m-1}J_i^{(m)}$, $J_i^{(m)}=\left[\frac{4i-1}{4m},\frac{4i+1}{4m}\right]$ $(i\geqq 0)$ のように表される。

補題 8.3 により、$j_i^{(m)}:S^1\longrightarrow(S^1,S^1\backslash\mathrm{Int}(J_i^{(m)}))$, $i_i^{(m)}:(J_i^{(m)},\partial J_i^{(m)})\longrightarrow(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(J_i^{(m)}))$ に対し、$(i_i^{(m)})_*[J_i^{(m)},\partial J_i^{(m)}]=(j_i^{(m)})_*[S^1]$ である。従って、$j^{(m)}:S^1\longrightarrow(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(J^{(m)}))$, $i^{(m)}:\bigsqcup_{i=0}^{m-1}(J_i^{(m)},\partial J_i^{(m)})\longrightarrow(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(J^{(m)}))$ に対し、$\sum_{i=0}^{m-1}(i_i^{(m)})_*[J_i^{(m)},\partial J_i^{(m)}]=(j^{(m)})_*[S^1]$ である。

さて、$f_m|J_i^{(m)}:(J_i^{(m)},\partial J_i^{(m)})\longrightarrow(S^1_+,\partial S^1_+)$ は向きを保つ同相写像であるから、$(f_m)_*[J_i^{(m)},\partial J_i^{(m)}]=[S^1_+,\partial S^1_+]$ となる。

ここで現れた写像は次の可換図式を満たす。

$$\begin{array}{ccccc}
S^1 & \xrightarrow{j_i^{(m)}} & (S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(J_i^{(m)})) & \xleftarrow{i_i^{(m)}} & (J_i^{(m)},\partial J_i^{(m)})\\
\mathrm{id}\uparrow & & \uparrow & & \downarrow\\
S^1 & \xrightarrow{j^{(m)}} & (S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(J^{(m)})) & \xleftarrow{i^{(m)}} & \bigsqcup_{i=0}^{m-1}(J_i^{(m)},\partial J_i^{(m)})\\
f_m\downarrow & & f_m\downarrow & & f_m\downarrow\\
S^1 & \xrightarrow{j_*} & (S^1,S^1_-) & \xleftarrow{i_*} & (S^1_+,\partial S^1_+)
\end{array}$$

従って、

$$\begin{aligned}(f_m)_*(j^{(m)})_*[S^1]&=\sum_{i=0}^{m-1}(f_m)_*(i_i^{(m)})_*[J_i^{(m)},\partial J_i^{(m)}]\\&=m\ i_*[S^1,S^1_+]=j_*(m[S^1])\end{aligned}$$

である。従って、$(f_m)_*[S^1]=m[S^1]$, すなわち、$\deg(f_m)=m$ である。

$-m\leqq -1$ に対しては、${f_{-m}}^{-1}(S^1_+)=J^{(m)}$ であるが、

$$f_{-m}|J_i^{(m)}:(J_i^{(m)},\partial J_i^{(m)})\longrightarrow(S^1_+,\partial S^1_+)$$

は向きを反対にする同相写像だから、上の計算の中で、$f_{-m}[J_i^{(m)},\partial J_i^{(m)}]=-[S^1_+,\partial S^1_+]$ となる。従って、$\deg(f_{-m})=-m$ を得る。

$k=0$ のときは、写像 $c_p:S^1\longrightarrow\{p\}$, $b\in S^1$ への定値写像 $c_b:\{p\}\longrightarrow S^1$ に対し、$f_0=c_b\circ c_p$ となり、$f_*=(c_b)_*(c_p)_*$ であるが、$H_1(\{p\})\cong 0$ だから、$(f_0)_*=0$ である。

(4)　円周から円周への写像 g はある f_m にホモトピックであることは次のように示す。

円周の基本群について議論したときの議論（第２段）から、合成写像 $g\circ p:[0,1]\longrightarrow S^1\longrightarrow S^1$ に対し、$\widetilde{g\circ p}:[0,1]\longrightarrow\boldsymbol{R}$ で、$p\circ\widetilde{g\circ p}=g\circ p$ となるものがある。$m=\widetilde{g\circ p}(1)-\widetilde{g\circ p}(0)$ とするとき、$\widetilde{f_m\circ p}$ は $\widetilde{f_m\circ p}(x)=mx$ ととることができる。$\widetilde{F}(t,x)=(1-t)\widetilde{g\circ p}(x)+t\widetilde{f_m\circ p}(x)$ とおくと、$\widetilde{F}(t,1)=(1-t)\widetilde{g\circ p}(1)+t\widetilde{f_m\circ p}(1)=(1-t)(\widetilde{g\circ p}(0)+m)+tm=(1-t)\widetilde{g\circ p}(0)+m=$

$(1-t)\widetilde{g\circ p}(0)+t\widetilde{f_m\circ p}(0)+m$ であり、連続写像 $F:[0,1]\times S^1 \longrightarrow S^1$ を引き起こす。従って、g は f_m とホモトピックとなる。このとき、$g_*=m\times : H_1(S^1)\longrightarrow H_1(S^1)$ となる。 ■

8.2 球面から球面への写像の写像度

$k\geqq 1$ とする。$g:S^k\longrightarrow S^k$ に対して $Sg:S^{k+1}\longrightarrow S^{k+1}$ を

$$Sg(x_1,x_2,\dots,x_{k+2})=(x_1,\sqrt{1-{x_1}^2}g(\frac{(x_2,\dots,x_{k+2})}{\sqrt{1-{x_1}^2}}))$$

で定義する。これを g のサスペンションと呼ぶ。このとき、$\deg(g)=\deg(Sg)$ である。

$Sg|S^k=g$ であり、$Sg(S^{k+1}_\pm)\subset S^{k+1}_\pm$ であることに注意すると $\deg(g)=\deg(Sg)$ は、次の問題から従う。

【問題 8.5】 $n\geqq 2$ とする。

(1) $f:(D^n,S^{n-1})\longrightarrow(D^n,S^{n-1})$ について、$\deg(f)=\deg(f|S^{n-1})$ を示せ。

(2) $f:(S^n,S^n_-)\longrightarrow(S^n,S^n_-)$ について、$\deg(f:S^n\longrightarrow S^n)=\deg(f:(S^n,S^n_-)\longrightarrow(S^n,S^n_-))$ を示せ。解答例は、45 ページ。

任意の整数 m に対し、$\deg(f)=m$ となる連続写像 $f:S^1\longrightarrow S^1$ が存在するから、上のサスペンションをつくることにより、$n\geqq 2$ に対し、連続写像 $f:S^n\longrightarrow S^n$ で $\deg(f)=m$ となるものが存在する。

写像度は、$H_n(S^n)\cong \boldsymbol{Z}$ の生成元 $[S^n]$ を定めて決まっていた。この生成元を定めることは S^n の定めることと同じであることが次の問題からわかる。

【問題 8.6】 n 次元の円板 $D^n=\{x\in\boldsymbol{R}^n \mid \|x\|\leqq 1\}$ の境界を ∂D^n とする。
(1) 微分同相写像 $f:(D^n,\partial D^n)\longrightarrow(D^n,\partial D^n)$ $(n\geq 1)$ について、f が向きを保つことと $f_*=1:H_n(D^n,\partial D^n)\longrightarrow H_n(D^n,\partial D^n)$ と同値であることを示せ。

(2) n 次元の球面 $S^n=\partial D^{n+1}$ について、微分同相写像 $g:S^n\longrightarrow S^n$ が向きを保つことと $g_*=1:H_n(S^n)\longrightarrow H_n(S^n)$ と同値であることを示せ。解答例は 45 ページ。

【問題 8.7】 $f:S^n\longrightarrow S^n$ に対し、点 $y\in S^n$ で次の性質を持つものがあるとする。y の D^n と同相な閉近傍 U が存在し、$f^{-1}(U)$ が連結成分 V_j $(j=1,\dots,k)$ の和 $f^{-1}(U)=V_1\sqcup\cdots\sqcup V_k$ であるとするとき、$f|V_i:V_i\longrightarrow U$ は微分同相写像である。$f|V_j$ が向きを保つ微分同相写像のとき $\sigma(f|V_j)=+1$, $f|V_j$ が向きを裏返す微分同相写像のとき $\sigma(f|V_j)=-1$ と σ を定義するとき、$\deg f=\displaystyle\sum_{j=1}^k\sigma(f|V_j)$ を示せ。解答例は 45 ページ。

【問題 8.8】 $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ を有理関数とし、多項式 $P(z)$, $Q(z)$ は共通因数を含まないとする。R が定義する正則写像 $R:\boldsymbol{C}P^1\longrightarrow\boldsymbol{C}P^1$ を考える。$\deg P=p$, $\deg Q=q$ とするとき、$\deg R=\max\{p,q\}$ であることを示せ。解答例は 45 ページ。

9　問題の解答

【問題 6.3 の解答】 $\boldsymbol{Z}^k$ の生成元 a_i $(i = 1, \ldots, k)$ に対し、A_1 の元で $h_1(\widetilde{a}_i) = a_i$ をとる。$\sigma : \boldsymbol{Z}^k \longrightarrow A_2$ を $s(\sum_{i=1}^k t_i a_i) = \sum_{i=1}^k t_i \widetilde{a}_i$ で定義すると、s は準同型であるが、$h_2 \circ s = \mathrm{id}_{\boldsymbol{Z}^k}$ だから単射である。A_1 の元 $\widetilde{a}$ に対し、$\widetilde{a} - s(h_2(\widetilde{a}))$ は、$h_2(\widetilde{a} - \sigma(h_2(\widetilde{a}))) = 0$ だから、系列の完全性により、$h_1(A_1)$ の元である。h_1 は単射だから、$r(\widetilde{a}) = (h_1)^{-1}(\widetilde{a} - \sigma(h_2(\widetilde{a})))$ と定めると、$r : A_2 \longrightarrow A_1$ は準同型であり、$r \circ h_1 = \mathrm{id}_{A_1}$ となる。こうして定義された準同型 $(r, h_2) : A_2 \longrightarrow A_0 \oplus \boldsymbol{Z}^k$, $h_1 + s : A_0 \oplus \boldsymbol{Z}^k \longrightarrow A_2$ が定義されるが、定義から $(r, h_2) \circ (h_1 + s) = \mathrm{id}_{A_0 \oplus \boldsymbol{Z}^k}$, $(h_1 + s) \circ (r, h_2) = \mathrm{id}_{A_1}$ が成立する。従って (r, h_2) は同型写像である。

【問題 6.8 の解答】 空間対の間の写像、$(X_1, \emptyset) \longrightarrow (X, X_2)$, $(X_2, X_2) \longrightarrow (X, X_2)$ がそれぞれの完全系列に誘導する準同型写像から、空間対 $(X_1, \emptyset)$ のホモロジー完全系列と空間対 (X_2, X_2) のホモロジー完全系列の直和から空間対 (X, X_2) のホモロジー完全系列への準同型写像が得られる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{n+1}(X, X_2) & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(X_2) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, X_2) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(X_2) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\begin{matrix} H_{n+1}(X_1) \\ \oplus \\ H_{n+1}(X_2, X_2) \end{matrix} & \xrightarrow{\partial_*} & \begin{matrix} H_n(\emptyset) \\ \oplus \\ H_n(X_2) \end{matrix} & \xrightarrow{i_*} & \begin{matrix} H_n(X_1) \\ \oplus \\ H_n(X_2) \end{matrix} & \xrightarrow{j_*} & \begin{matrix} H_n(X_1) \\ \oplus \\ H_n(X_2, X_2) \end{matrix} & \xrightarrow{\partial_*} & \begin{matrix} H_{n-1}(\emptyset) \\ \oplus \\ H_{n-1}(X_2) \end{matrix}
\end{array}$$

ここで、例 6.6 により、$H_n(X_2, X_2) \cong \boldsymbol{0}$ であり、$H_n(X_1) \longrightarrow H_n(X, X_2)$ は切除公理により同型である。ファイブ・レンマから $H_n(X) \cong H_n(X_1) \oplus H_n(X_2)$ が得られる。

【問題 6.9 の解答】 1 点集合 $\{p\}$ 対し、写像 $c_p : X \longrightarrow \{p\}$ をとり、$x \in X$ に対し、定値写像 $c_x : \{p\} \longrightarrow X$ をとると $c_p \circ c_x = \mathrm{id}_{\{p\}}$ である。従って、$(c_p)_* \circ (c_x)_* = \mathrm{id} : H_0(\{p\}) \longrightarrow H_0(\{p\})$ である。次元公理から $H_0(\{p\}) \cong \boldsymbol{Z}$ であり、$(c_p)_* : H_0(X) \longrightarrow H_0(\{p\}) \cong \boldsymbol{Z}$ は全射である。

【問題 6.11 の解答】 $D^n_{1+\varepsilon} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \boldsymbol{x} \leqq 1 + \varepsilon\}$ とおく。$D^n \subset U$ に対し、正実数 $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$ で、$D^n_{1+2\varepsilon} \subset U$ となるものがある。$\varphi : [-2, 2] \longrightarrow [0, 1]$ を $\{-2, 2\}$ の近傍で 0, $[-1, 1]$ で 1 となる (C^∞ 級) 関数とする。$h_t : D^n_{1+2\varepsilon} \longrightarrow D^n_{1+2\varepsilon}$ を $h_t(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^{\varphi((\|\boldsymbol{x}\|-1)/\varepsilon)t}}$ $(\boldsymbol{x} \in D^n_{1+2\varepsilon} \setminus D^n_{1-2\varepsilon})$, で定義する。$h_t$ を $M^n \setminus \widehat{\iota}(D^n_{1+2\varepsilon})$ 上では恒等写像であるように拡張して、ホモトピー $h_t : M^n \longrightarrow M^n$ を得る。

$$M^n \supset M^n \setminus \iota(D^n_{1-\varepsilon}) \supset M^n \setminus \mathrm{Int}(\iota(D^n)) \supset M^n \setminus \iota(D^n) \supset M^n \setminus \mathrm{Int}(\iota(D^n_{1+\varepsilon}))$$

に対して、$(M^n \setminus \mathrm{Int}(\iota(D^n))) \setminus (M^n \setminus \iota(D^n)) = \iota(S^{n-1})$ に対して、$h_t|\iota(S^{n-1}) = \mathrm{id}_{\iota(S^{n-1})}$, $W = (M^n \setminus \iota(D^n_{1-\varepsilon})) \setminus (M^n \setminus \mathrm{Int}(\iota(D^n_{1+\varepsilon}))) = \mathrm{Int}(\iota(D^n_{1+\varepsilon}) \setminus \iota(D^n_{1-\varepsilon})$ に対して、$h_t(W) \subset W$, $h_1(W) \subset \iota(S^{n-1})$ をみたすので、例題 6.10 により、$M^n \setminus \iota(D^n)$ は切除可能となり、包含写像 $(\iota(D^n), \iota(S^{n-1})) \longrightarrow (M^n, M^n \setminus \mathrm{Int}(\iota(D^n)))$ はホモロジー群の同型を誘導する。

【問題 7.2 の解答】 n 次元球面 S^n に対して、$\pm e_1 = (\pm 1, 0, \ldots, 0)$ からのステレオグラフ射影 $p_\pm : S^n \setminus \{\pm e_1\} \longrightarrow \boldsymbol{R}^{n-1}$ を、$\boldsymbol{x}' = (x_2, \ldots, x_{n+1})$ として $(x_1, \boldsymbol{x}') \longmapsto \dfrac{1}{1 \pm x_1}\boldsymbol{x}'$ で定義する。逆写像が $\boldsymbol{x}' \longmapsto (\dfrac{\|\boldsymbol{x}'\|^2 \mp 1}{\|\boldsymbol{x}'\|^2 + 1}, \dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}'\|^2 + 1}\boldsymbol{x}')$ で定義され、$S^n \setminus \{\pm e_1\}$ と $\boldsymbol{R}^n$ の微分同相写像を与えている。

また、$i_{S^n} : S^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^{n+1} \setminus \boldsymbol{0}$ は、ホモトピー同値写像であるから、$(i_{S^n})_* : H_k(S^n) \longrightarrow H_k(\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus \boldsymbol{0})$ $(k \geqq 0)$ は同型写像である。

$S^0 = \{\pm e_1\}$ のホモロジー群については、命題 7.1 の証明と同じやり方で、$H_k(S^0) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} & (k = 0) \\ 0 & (k > 0) \end{cases}$ である。ホモトピー同値 $i_{S^0} : S^0 \longrightarrow \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{0}$ により、$H_k(\boldsymbol{R} \setminus \{\boldsymbol{0}\}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} & (k = 0) \\ 0 & (k > 0) \end{cases}$ である。$H_0(\boldsymbol{R} \setminus \{\boldsymbol{0}\})$ の生成元は、$\langle e_1 \rangle$, $\langle -e_1 \rangle$ である。

空間対 $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{0})$ のホモロジー完全系列を書く。

$$\begin{array}{l}
\xrightarrow{\partial_*} H_2(\boldsymbol{R}\setminus\{\boldsymbol{0}\}) \xrightarrow{i_*} H_2(\boldsymbol{R}) \xrightarrow{j_*} H_2(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{0})\\
\xrightarrow{\partial_*} H_1(\boldsymbol{R}\setminus\{\boldsymbol{0}\}) \xrightarrow{i_*} H_1(\boldsymbol{R}) \xrightarrow{j_*} H_1(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{0})\\
\xrightarrow{\partial_*} H_0(\boldsymbol{R}\setminus\{\boldsymbol{0}\}) \xrightarrow{i_*} H_0(\boldsymbol{R}) \xrightarrow{j_*} H_0(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{0}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

について、例 6.7 により、$H_k(\boldsymbol{R}) \cong \begin{cases}\boldsymbol{Z} & (k=0)\\ 0 & (k>0)\end{cases}$ だから、わかっている群を書くと以下の完全系列を得る。

$$\begin{array}{lclclc}
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_2(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{0})\\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_1(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{0})\\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} & H_0(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{0}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

この完全系列から $H_k(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{0}) \cong 0\ (k \geqq 2)$ がわかる。例 6.7 の可縮な空間の H_0 の生成元の決め方により、$i_* : H_0(\boldsymbol{R}\setminus\{\boldsymbol{0}\}) \longrightarrow H_0(\boldsymbol{R})$ において、$i_*(n_1,n_2) = n_1+n_2$ がわかる。従って、$H_0(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\setminus\{\boldsymbol{0}\}) \cong \boldsymbol{0}$, $H_1(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\setminus\{\boldsymbol{0}\}) \cong \boldsymbol{Z}$ を得る ($H_1(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\setminus\{\boldsymbol{0}\})$ の生成元 $[\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\setminus\{\boldsymbol{0}\}]$ は、$\partial_*[\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\setminus\{\boldsymbol{0}\}] = \langle e_1\rangle - \langle -e_1\rangle$ にとる)。

空間対 $(S^1,S^1\setminus\{e_1\})$ のホモロジー完全系列は次のようになる。

$$\begin{array}{l}
\xrightarrow{\partial_*} H_2(S^1\setminus\{e_1\}) \xrightarrow{i_*} H_2(S^1) \xrightarrow{j_*} H_2(S^1,S^1\setminus\{e_1\})\\
\xrightarrow{\partial_*} H_1(S^1\setminus\{e_1\}) \xrightarrow{i_*} H_1(S^1) \xrightarrow{j_*} H_1(S^1,S^1\setminus\{e_1\})\\
\xrightarrow{\partial_*} H_0(S^1\setminus\{e_1\}) \xrightarrow{i_*} H_0(S^1) \xrightarrow{j_*} H_0(S^1,S^1\setminus\{e_1\}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

ここで、ステレオグラフ射影 $p_+ : S^1\setminus\{e_1\} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ は同相写像だから、$H_k(S^1\setminus\{e_1\}) \cong H_k(\boldsymbol{R}) \cong \begin{cases}\boldsymbol{Z} & (k=0)\\ 0 & (k>0)\end{cases}$ である。
$S^1 \supset S^1\setminus\{e_1\} \supset \{-e_1\}$ に対して、切除公理により、

$$H_k(S^1\setminus\{-e_1\},S^1\setminus\{\pm e_1\}) \cong H_k(S^1,S^1\setminus\{e_1\})$$

また、ステレオグラフ射影 p_- が同相写像 $(S^1\setminus\{-e_1\},S^1\setminus\{\pm e_1\}) \longrightarrow (\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{0})$ を導くから、

$$H_k(S^1\setminus\{-e_1\},S^1\setminus\{\pm e_1\}) \cong H_k(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{0}) \cong \begin{cases}\boldsymbol{Z} & (k=1)\\ 0 & (k\neq 1)\end{cases}$$

である。それらを書くと

$$\begin{array}{lclclcl}
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_2(S^1) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_1(S^1) & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^1) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \longrightarrow 0
\end{array}$$

を得る。この完全系列から $H_k(S^1) \cong 0\ (k \geqq 2)$ がわかる。

$\partial_* : H_1(S^1,S^1\setminus\{e_1\}) \longrightarrow H_0(S^1\setminus\{e_1\})$ を調べるために空間対 $(S^1\setminus\{-e_1\},S^1\setminus\{\pm e_1\})$ の完全系列と空間対 $(S^1,S^1\setminus\{e_1\})$ の完全系列の間の包含写像 $(S^1\setminus\{-e_1\},S^1\setminus\{\pm e_1\}) \longrightarrow (S^1,S^1\setminus\{e_1\})$ が誘導する準同型写像をみる。$\{\pm e_2\} = \{(0,\pm 1)\} \subset S^1$ として、$\partial_*[S^1\setminus\{-e_1\},S^1\setminus\{\pm e_1\}] = \langle e_2\rangle - \langle -e_2\rangle$ となっている。$\langle e_2\rangle$, $\langle -e_2\rangle$ は包含写像 $S^1\setminus\{\pm e_1\} \longrightarrow S^1\setminus\{e_1\}$ によって $H_0(S^1\setminus\{e_1\})$ の同じ生成元に写る。従って、$\partial_*[S^1\setminus\{-e_1\},S^1\setminus\{\pm e_1\}]$ は 0 に写るから、∂_* は零写像となる。

$$\begin{tikzcd}
\overset{\boldsymbol{Z}}{H_1(S^1\setminus\{-e_1\},S^1\setminus\{\pm e_1\})} \arrow[r, "\partial_*"', "(-1{,}1)"] \arrow[d, "\cong"] & \overset{\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}}{H_0(S^1\setminus\{\pm e_1\})} \arrow[r, "i_*"] \arrow[d] & \overset{\boldsymbol{Z}}{H_0(S^1\setminus\{-e_1\})} \\
\underset{\boldsymbol{Z}}{H_1(S^1,S^1\setminus\{e_1\})} \arrow[r, "\partial_*"] & \underset{\boldsymbol{Z}}{H_0(S^1\setminus\{e_1\})} &
\end{tikzcd}$$

従って、$H_1(S^1) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_0(S^1) \cong \boldsymbol{Z}$ が得られる。ここで、$H_0(S^1)$ の生成元は $x \in S^1$ に対して $\langle x\rangle$ で表されている。

さて、$H_k(S^{n-1}) \cong \begin{cases}\boldsymbol{Z} & (k=0,\ n-1)\\ 0 & (k\neq 0,\ n)\end{cases}$ が正しいとし、$H_0(S^{n-1})$ の生成元は、任意の定値写像 $c_x\ (x \in S^{n-1})$ による $H_0(\{p\})$ の生成元の像 $\langle x\rangle = (c_x)_*(\boldsymbol{1})$ であるとする。

空間対 $(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\})$ のホモロジー完全系列を書くと次のようになる。

$$\begin{array}{cccccc}
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & H_{n+1}(\boldsymbol{R}^n) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_n(\boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}) & \xrightarrow{i_*} & H_n(\boldsymbol{R}^n) & \xrightarrow{j_*} & H_n(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(\boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(\boldsymbol{R}^n) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-2}(\boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}) & \xrightarrow{i_*} & \cdots & & \\
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & H_1(\boldsymbol{R}^n) & \xrightarrow{j_*} & H_1(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_0(\boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}) & \xrightarrow{i_*} & H_0(\boldsymbol{R}^n) & \xrightarrow{j_*} & H_0(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

ここで、包含写像 $S^{n-1} \longrightarrow \boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ は、ホモトピー同値写像で、$\boldsymbol{R}^n$ は可縮だから、

$$\begin{array}{cccccc}
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_n(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & \cdots & & \\
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_1(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} & H_0(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

$H_0(\boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\})$ と $H_0(\boldsymbol{R}^n)$ の生成元は、ともに任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であるから、$H_0(\boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}) \xrightarrow{i_*} H_0(\boldsymbol{R}^n)$ は同型であり、この完全系列から $H_k(\boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}) \cong \boldsymbol{Z}$ $(k = n-1)$, $H_k(\boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}) \cong 0$ $(k \neq n-1)$ がわかる。

空間対 $(S^n, S^n \setminus \{e_1\})$ のホモロジー完全系列は次のようになる。

$$\begin{array}{cccccc}
 & H_{n+1}(S^n \setminus \{e_1\}) & \xrightarrow{i_*} & H_{n+1}(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(S^n, S^n \setminus \{e_1\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_n(S^n \setminus \{e_1\}) & \xrightarrow{i_*} & H_n(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_n(S^n, S^n \setminus \{e_1\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(S^n \setminus \{e_1\}) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(S^n, S^n \setminus \{e_1\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & \cdots & & \cdots & & \\
 & & \cdots & \cdots & \xrightarrow{j_*} & H_1(S^n, S^n \setminus \{e_1\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_0(S^n \setminus \{e_1\}) & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_0(S^n, S^n \setminus \{e_1\}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

ここで、ステレオグラフ射影 $p_+ : S^n \setminus \{e_1\} \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ は同相写像だから、$H_k(S^n \setminus \{e_1\}) \cong H_k(\boldsymbol{R}^n) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (k = 0) \\ 0 & (k > 0) \end{cases}$ である。
$S^n \supset S^n \setminus \{e_1\} \supset \{-e_1\}$ に対して、切除公理により、

$$H_k(S^n \setminus \{-e_1\}, S^n \setminus \{\pm e_1\}) \cong H_k(S^n, S^n \setminus \{e_1\})$$

また、ステレオグラフ射影 p_- が同相写像 $(S^n \setminus \{e_1\}, S^n \setminus \{\pm e_1\}) \longrightarrow (\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus \boldsymbol{0})$ を導くから、

$$H_k(S^n \setminus \{-e_1\}, S^n \setminus \{\pm e_1\}) \cong H_k(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus \boldsymbol{0}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (k = n) \\ 0 & (k \neq n) \end{cases}$$

である。それらを書くと

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_{n+1}(S^n) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_n(S^n) & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(S^n) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \cdots & & \cdots & & & \\
 & & & \cdots \quad \cdots & \xrightarrow{j_*} & 0 & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^n) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \longrightarrow 0
\end{array}$$

この完全系列から $H_k(S^n) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (k = 0,\ n) \\ 0 & (k \neq 0,\ n) \end{cases}$ がわかる。

【問題 7.3 の解答】 $h : \boldsymbol{R}^m \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ を同相写像とする。1 点 $x_0 \in \boldsymbol{R}^m$ をとると、同相写像 $h|(\boldsymbol{R}^m \setminus \{x_0\}) : \boldsymbol{R}^m \setminus \{x_0\} \longrightarrow \boldsymbol{R}^n \setminus \{h(x_0)\}$ が得られる。$\boldsymbol{R}^m \setminus \{x_0\}$ は S^{m-1} とホモトピー同値、$\boldsymbol{R}^n \setminus \{x_0\}$ は S^{n-1} とホモトピー同値であるから、S^{m-1} と S^{n-1} がホモトピー同値となる。これは、$m \neq n$ ならば、S^{m-1} と S^{n-1} のホモロジー群は異なるからホモトピー同値ではないことに矛盾する。従って、$m \neq n$ ならば、$\boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{R}^n$ は同相ではない。

【問題 7.4 の解答】 $x \in \mathrm{Int}(D^n)$ のとき、包含写像 $i_{S^{n-1}} : S^{n-1} \longrightarrow D^n \setminus \{x\}$ はホモトピー同値である。また、$x \in \partial D^n$ のとき、$p \in D^n \setminus \{x\}$ に対して、包含写像 $i_p : \{p\} \longrightarrow D^n$ はホモトピー同値である。
　$x \in \mathrm{Int}(D^n)$ のとき、可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_k(S^n) & \longrightarrow & H_k(D^n) & \longrightarrow & H_k(D^n, S^{n-1}) & \longrightarrow & H_{k-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & H_{k-1}(D^n) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_k(D^n \setminus \{x\}) & \longrightarrow & H_k(D^n) & \longrightarrow & H_k(D^n, D^n \setminus \{x\}) & \longrightarrow & H_{k-1}(D^n \setminus \{x\}) & \longrightarrow & H_{k-1}(D^n)
\end{array}$$

において、中央を除く準同型は同型であるから、

$$H_k(D^n, D^n \setminus \{x\}) \cong H_k(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (k = n) \\ \mathbf{0} & (k \neq n) \end{cases}$$

$x \in \partial D^n$ のとき、同様の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_k(S^n) & \longrightarrow & H_k(D^n) & \longrightarrow & H_k(D^n, \{p\}) & \longrightarrow & H_{k-1}(\{p\}) & \longrightarrow & H_{k-1}(D^n) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_k(D^n \setminus \{x\}) & \longrightarrow & H_k(D^n) & \longrightarrow & H_k(D^n, D^n \setminus \{x\}) & \longrightarrow & H_{k-1}(D^n \setminus \{x\}) & \longrightarrow & H_{k-1}(D^n)
\end{array}$$

から、$H_k(D^n, D^n \setminus \{x\}) \cong H_k(D^n, \{p\}) = \mathbf{0}$. 念のために述べると、$H_k(D^n, \{p\}) = \mathbf{0}$ は、上の行の完全系列と $H_k(\{p\}) \longrightarrow H_k(D^n)$ が同型であることからわかる。

【問題 8.2 の解答】 $f : S^n \longrightarrow S^n$ が全射でないとすると、f は定値写像にホモトピックである。実際、$x_0 \in S^n \setminus f(S^n)$ をとり、$(\boldsymbol{R}x_0) \perp$ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ のユークリッド内積に対し $x_0 \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ に直交する $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の n 次元部分空間とする。x_0 からのステレオグラフ射影 $\mathrm{pr} : S^n \setminus \{x_0\} \longrightarrow (\boldsymbol{R}x_0) \perp$ は同相写像で $F : [0,1] \times S^n \longrightarrow S^n$ を $F(t,x) = \mathrm{pr}^{-1}(t\,\mathrm{pr}(f(x)))$ で定義すると、F は連続で、$F(0,x) = -x_0$, $F(1,x) = f(x)$ である。c_{-x_0} は、$S^n \longrightarrow \{p\} \longrightarrow S^n$ の結合と考えられ、1点集合について、$H_n(\{p\}) \cong \mathbf{0}$ だから、$f_*[S^n] = (c_{-x_0})_*[S^n] = 0$ となる。

【問題 8.5 の解答】 hskip5pt (1)　空間対 (D^n, S^{n-1}) のホモロジー完全系列 $H_n(D_n) \longrightarrow H_n(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(D^n)$ への f, $f|S^{n-1}$ の作用をみると次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle (f|S^{n-1})_*} & & \downarrow \\
0 & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0
\end{array}$$

従って $\deg(f) = \deg(f|S^{n-1})$ である。
　(2)　空間対 (S^n, S^n_-) ののホモロジー完全系列 $H_n(S^n_-) \longrightarrow H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n, S^n_-) \longrightarrow H_{n-1}(S^n_-)$ への f の作用を考えると次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow \\
0 & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & 0
\end{array}$$

従って $\deg(f : S^n \longrightarrow S^n) = \deg(f : (S^n, S^n_-) \longrightarrow S^n, S^n_-))$ である。

【問題 8.6 の解答】

【問題 8.7 の解答】

【問題 8.8 の解答】