20　チェイン写像

定義 20.1 A_*, B_*, C_* をチェイン複体とする。チェイン写像 $i : A_* \longrightarrow B_*$ が単射、$j : B_* \longrightarrow C_*$ が全射、$\ker(j) = \mathrm{im}(i)$ のとき

$$0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{i} B_* \xrightarrow{j} C_* \longrightarrow 0$$

をチェイン複体の短完全列 *(short exact sequence)* と呼ぶ。

チェイン複体 A_*, B_*, C_* を列に書き、チェイン写像を行に書くとき、チェイン複体の短完全列は、行の系列が完全系列である可換図式のことである。

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "\partial"] & {} \arrow[d, "\partial"] & {} \arrow[d, "\partial"] & \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_2 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_1 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d] & B_0 \arrow[r, "j"] \arrow[d] & C_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

命題 20.2 チェイン複体の短完全列

$$0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{i} B_* \xrightarrow{j} C_* \longrightarrow 0$$

に対し、連結準同型 $\partial_* : H_k(C_*) \longrightarrow H_{k-1}(A_*)$ が次で定義される。

- $c_k \in \ker(\partial : C_k \longrightarrow C_{k-1})$ に対し、$j(b_k) = c_k$ となる $b_k \in B_k$ をとり、$i(a_{k-1}) = \partial(b_k)$ となる $a_{k-1} \in \ker(\partial : A_{k-1} \longrightarrow A_{k-2})$ をとる。これにより、$\partial_* : H_k(C_*) \longrightarrow H_{k-1}(A_*)$ を $\partial_*[c_k] = [a_{k-1}]$ とする。

$$\begin{tikzcd}
 & b_k \arrow[r, mapsto, "j"] \arrow[d, mapsto] & c_k \arrow[d, mapsto] \\
a_{k-1} \arrow[r, mapsto, "i"] \arrow[d, mapsto] & \partial(b_k) \arrow[r, mapsto, "j"] \arrow[d, mapsto] & 0 \\
0 \arrow[r, mapsto, "i"] & 0 &
\end{tikzcd}$$

詳しく説明すると、$c_k \in \ker(\partial : C_k \longrightarrow C_{k-1})$ に対し（　）、j は全射だから $j(b_k) = c_k$ となる $b_k \in B_k$ がとれる（　）。$j(\partial(b_k)) = \partial(j(b_k)) = 0$ だから、行の系列の完全性から $i(a_{k-1}) = \partial(b_k)$ となる $a_{k-1} \in A_{k-1}$ がとれる（　）。$i(\partial(a_{k-1})) = \partial(i(a_{k-1})) = \partial(\partial(b_k)) = 0$ で、i は単射だから、$\partial(a_{k-1}) = 0$ となる。こうして、$c_k \in \ker(\partial : C_k \longrightarrow C_{k-1})$ に対し、$a_{k-1} \in \ker(\partial : A_{k-1} \longrightarrow A_{k-2})$ をとり、これにより、$\partial_* : H_k(C_*) \longrightarrow H_{k-1}(A_*)$ を $\partial_*[c_k] = [a_{k-1}]$ とするのである。上の図式参照。

命題 20.2 の証明 ∂_* が矛盾なく定義されているためには次を示せばよい。
(1-1) $j(b'_k) = c_k$ となる b'_k も同じ $H_{k-1}(A_*)$ の元を定めること、
(1-2) $\ker(\partial : C_k \longrightarrow C_{k-1}) \longrightarrow H_{k-1}(A_*)$ は準同型となること、
(1-3) $c_k = \partial c_{k+1}$ は $0 \in H_{k-1}(A_*)$ を定めること。

(1-1)　c_k に対し、$j(b'_k)=c_k$ となる $b'_k\in B_k$ をとると、$i(a'_{k-1})=\partial(b'_k)$ となる a'_{k-1} が定まる。b'_k-b_k について（　）、$j(b'_k-b_k)=c_k-c_k=0$ だから、$b'_k-b_k=i(a_k)$ と書かれる（　）。このとき、$\partial(b'_k-b_k)=\partial(i(a_k))=i(\partial(a_k))$, $\partial(b'_k-b_k)=i(a'_{k-1})-i(a_{k-1})$ であり、i は単射だから、$a'_{k-1}=a_{k-1}+\partial(a_k)$ となる（　）。従って b'_k も同じ $H_{k-1}(A_*)$ の元を定める。下の図式参照。

$$\begin{array}{ccccc}
a_k & \xmapsto{i} & b'_k-b_k & \xmapsto{j} & c_k-c_k=0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\begin{array}{c}\partial(a_k)=\\ a'_{k-1}-a_{k-1}\end{array} & \xmapsto{i} & \partial(b'_k)-\partial(b_k) & \xmapsto{j} & 0
\end{array}$$

(1-2)　$\ker(\partial:C_k\longrightarrow C_{k-1})$ の元の和、差に対して、B_k の元は和、差に取れるから、$\ker(\partial:C_k\longrightarrow C_{k-1})\longrightarrow H_{k-1}(A_*)$ は準同型となる。

(1-3)　$c_k=\partial c_{k+1}$ とすると、$j(b_{k+1})=c_{k+1}$ となる $b_{k+1}\in B_{k+1}$ をとることができる。$j(\partial(b_{k+1}))=\partial(j(b_{k+1}))=\partial c_{k+1}=c_k$ だから、$b_k=\partial(b_{k+1})$ が定める元を考えればよいが、$\partial(b_k)=\partial(\partial(b_{k+1}))=0$ だから、$a_{k-1}=0$ ととれる $(i(0)=0=\partial(b_k))$。従って $c_k=\partial c_{k+1}$ は、$0\in H_{k-1}(A_*)$ を定める。
■

定理 20.3 チェイン複体の短完全列 $0\longrightarrow A_*\xrightarrow{i}B_*\xrightarrow{j}C_*\longrightarrow 0$ は次のチェイン複体のホモロジー群の長完全系列を誘導する。

$$\begin{array}{ccccccc}
\xrightarrow{\partial_*} & H_2(A_*) & \xrightarrow{i_*} & H_2(B_*) & \xrightarrow{j_*} & H_2(C_*) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_1(A_*) & \xrightarrow{i_*} & H_1(B_*) & \xrightarrow{j_*} & H_1(C_*) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_0(A_*) & \xrightarrow{i_*} & H_0(B_*) & \xrightarrow{j_*} & H_0(C_*) & \longrightarrow\ 0
\end{array}$$

証明　$\operatorname{im} i_*\subset\ker j_*$, $\operatorname{im} j_*\subset\ker\partial_*$, $\operatorname{im}\partial_*\subset\ker i_*$, $\operatorname{im} i_*\supset\ker j_*$, $\operatorname{im} j_*\supset\ker\partial_*$, $\operatorname{im}\partial_*\supset\ker i_*$ を順に確かめる。

$\underline{\operatorname{im} i_*\subset\ker j_*}$. $j\circ i:A_*\longrightarrow C_*$ は 0 チェイン写像であり、$(j\circ i)_*=j_*\circ i_*$ だから、$j_*\circ i_*=0$. 従って、$\operatorname{im} i_*\subset\ker j_*$.

$\underline{\operatorname{im} j_*\subset\ker\partial_*}$.　∂_* の定義において、$\partial b_k=0$ となる $b_k\in B_k$ について、$\partial_*[j(b_k)]$ を計算するには、b_k をとればよいが, これに対して $\partial b_k=0$ だから、$a_{k-1}=0$ となる。

$\underline{\operatorname{im}\partial_*\subset\ker i_*}$. $a_{k-1}\in\ker(\partial:A_{k-1}\longrightarrow A_{k-2})$ は、$\partial c_k=0$ となる $c_k\in C_k$ に対して、$j(b_k)=c_k$ となる $b_k\in B_k$ をとり、$i(a_{k-1})=\partial(b_k)$ となるようにとられている。従って、$i_*[a_{k-1}]=0\in H_{k-1}(B_*)$.

$\underline{\operatorname{im} i_*\supset\ker j_*}$. $\partial b_k=0$ が $j(b_k)=\partial c_{k+1}$ を満たすとき、$j(b_{k+1})=c_{k+1}$ となる b_{k+1} をとる。$j(b_k-\partial b_{k+1})=j(b_k)-j(\partial(b_{k+1}))=j(b_k)-\partial(j(b_{k+1}))=j(b_k)-\partial c_{k+1}=0$ だから、$i(a_k)=b_k-\partial b_{k+1}$ となる a_k がある。$i(\partial a_k)=\partial(i(a_k))=\partial b_k-\partial(\partial b_{k+1})=0$ だから $\partial a_k=0$ だが、$i_*[a_k]=[b_k-\partial b_{k+1}]=[b_k]$ であるから、$\operatorname{im} i_*\supset\ker j_*$.

$\underline{\operatorname{im} j_*\supset\ker\partial_*}$.　$c_k\in\ker(\partial:C_k\longrightarrow C_{k-1})$ について、$j(b_k)=c_k$ となる $b_k\in B_k$ をとり、$i(a_{k-1})=\partial(b_k)$ としたとき、$a_{k-1}=\partial a_k$ とする。$b_k-i(a_k)$ について、$\partial(b_k-i(a_k))=\partial(b_k)-\partial(i(a_k))=i(a_{k-1})-i(\partial(a_k))=i(a_{k-1})-i(a_{k-1})=0$ である。$j_*[b_k-i(a_k)]=[j(b_k)-j(i(a_k))]=[c_k]$ だから、$\operatorname{im} j_*\supset\ker\partial_*$.

$\underline{\operatorname{im}\partial_*\supset\ker i_*}$.　$a_{k-1}\in\ker(\partial:A_{k-1}\longrightarrow A_{k-2})$ に対し、$i(a_{k-1})=\partial(b_k)$ とする。$\partial(j(b_k))=j(\partial(b_k))=j(i(a_{k-1}))=0$ である。$\partial_*[j(b_k)]=[a_{k-1}]$ だから、$\operatorname{im}\partial_*\supset\ker i_*$. ■

21　マイヤー・ビエトリス完全系列

部分胞体複体からは包含写像が胞体写像となる。

21.1　マイヤー・ビエトリス完全系列

胞体複体 X が 2 つの胞体複体 X_1, X_2 の和集合であり、$X_{12} = X_1 \cap X_2$ も胞体複体であるとする。(X_1, X_2, X_{12} は X の部分複体。) このとき、

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\ X_{12} \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & X \\ & X_2 \arrow[ur, "j_2"'] & \end{tikzcd}$$

について、$C_k(X_{12}) = H_k({X_{12}}^{(k)}, {X_{12}}^{(k-1)})$, $C_k(X_1) = H_k({X_1}^{(k)}, {X_1}^{(k-1)})$, $C_k(X_2) = H_k({X_2}^{(k)}, {X_2}^{(k-1)})$, $C_k(X) = H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)})$ に対し、次のチェイン複体の短完全系列が得られる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \longrightarrow & C_2(X_{12}) & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & C_2(X_1) \oplus C_2(X_2) & \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} & C_2(X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \longrightarrow & C_1(X_{12}) & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & C_1(X_1) \oplus C_1(X_2) & \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} & C_1(X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \longrightarrow & C_0(X_{12}) & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & C_0(X_1) \oplus C_0(X_2) & \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} & C_0(X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

ここで、

$$\begin{tikzcd} & H_k({X_1}^{(k)}, {X_1}^{(k-1)}) \arrow[dr, "j_{1*}"] & \\ H_k({X_{12}}^{(k)}, {X_{12}}^{(k-1)}) \arrow[ur, "i_{1*}"] \arrow[dr, "i_{2*}"'] & & H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \\ & H_k({X_2}^{(k)}, {X_2}^{(k-1)}) \arrow[ur, "j_{2*}"'] & \end{tikzcd}$$

を使っている。

この短完全系列から得られる連結準同型 $\varDelta_* : H_k(X) \longrightarrow H_{k-1}(X_{12})$ の定義は以下のようになる。$c \in \ker(\partial : C_k(X) \longrightarrow C_{k-1}(X))$ に対し、$c_1 \in C_k(X_1)$, $c_2 \in C_*(X_2)$ で、$j_{1*}c_1 - j_{2*}c_2 = c$ となるものをとる。$i_{1*}(c_{12}) = \partial(j_{1*}c_1)$, $i_{2*}(c_{12}) = \partial(j_{2*}c_2)$ の一方を満たす c_{12} は他方も満たす $\ker(\partial : C_k(X_{12}) \longrightarrow C_{k-1}(X_{12}))$ の元である。$\varDelta_*[c] = [c_{12}]$ で定められる。

この連結準同型を用いて、次のホモロジー群の長完全系列が得られる。これをマイヤー・ビエトリス完全系列と呼ぶ。

$$\begin{array}{l}
\xrightarrow{\varDelta_*} H_2(X_{12}) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_2(X_1) \oplus H_2(X_2) \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} H_2(X) \\
\xrightarrow{\varDelta_*} H_1(X_{12}) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} H_1(X) \\
\xrightarrow{\varDelta_*} H_0(X_{12}) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_0(X_1) \oplus H_0(X_2) \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} H_0(X) \longrightarrow 0
\end{array}$$

【問題 21.1】 $n \geqq 2$ とする。n 次元球面 S^n に、$S^n = S^n_+ \cup S^n_-$ について、$S^n_+,\ S^n_-,\ S^{n-1} = S^n_+ \cap S^n_-$ が部分胞体複体となる胞体分割を与えよ。マイヤー・ビエトリス完全系列を用いて、S^{n-1} のホモロジー群がわかっているときに S^n のホモロジー群を決定せよ。解答例は 76 ページ。

【問題 21.2】 $m, n \geqq 1$ とする。

$$\begin{aligned} S^{m+n+1} &= \partial(D^{m+1} \times D^{n+1}) \\ &= (\partial D^{m+1}) \times D^{n+1} \cup D^{m+1} \times (\partial D^{n+1}) \\ &= S^m \times D^{n+1} \cup D^{m+1} \times S^n, \\ S^m \times D^{n+1} \cap D^{m+1} \times S^n &= S^m \times S^n \end{aligned}$$

について、$S^m \times S^n$ が部分複体となる胞体分割を与えよ。これについてのマイヤー・ビエトリス完全列の準同型写像を記述せよ。

22 胞体複体の対

有限胞体複体 X の部分複体 A を考える。すなわち、A は胞体複体であり、その胞体の集合が、胞体複体 X の胞体の部分集合となっているとする。胞体複体のチェイン複体 $C_*(X),\ C_*(A)$ はそれぞれ、X の胞体、A の胞体を生成元とする自由加群である。$C_*(X,A) = C_*(X)/C_*(A)$ とおき、射影を $j : C_*(X) \longrightarrow C_*(X,A)$ とおく。$C_*(X,A)$ は、A に含まれない X の胞体を生成元とする自由加群と考えることも出来る。

包含写像 $i : A \longrightarrow X$ はチェイン写像 $i_* : C_*(A) \longrightarrow C_*(X)$ を誘導するから、$C_*(X)$ の境界準同型 ∂ は、$\partial : C_*(X,A) \longrightarrow C_{*-1}(X,A)$ を誘導し、$\partial \circ \partial = 0$ だから $C_*(X,A)$ はチェイン複体となる。こうして、次のチェイン複体の短完全列を得る。

$$0 \longrightarrow C_*(A) \xrightarrow{\ i\ } C_*(X) \xrightarrow{\ j\ } C_*(X,A) \longrightarrow 0$$

このチェイン複体の短完全列から、定理 20.3 により導かれるホモロジー群の長完全系列は、空間対 (X,A) のホモロジー群の完全系列と同じものを与える。

$0 \longrightarrow H_k(A^{(j)}, A^{(j-1)}) \longrightarrow H_k(X^{(j)}, X^{j-1}) \longrightarrow H_k(X^{(j)}, X^{j-1} \cup A^{(j)}) \longrightarrow$ 0

23 キネットの公式と普遍係数定理

23.1 積複体

有限胞体複体 X, Y の直積 $X \times Y$ は自然に胞体複体の構造を持つ。m 次元有限胞体複体

$$\begin{aligned} &X = X^{(m)} \supset X^{(m-1)} \supset \cdots \supset X^{(1)} \supset X^{(0)}, \\ &X^{(\ell)} = X^{(\ell-1)} \cup_{\varphi^\ell_X} (D^\ell_1 \sqcup \cdots \sqcup D^\ell_{k_X(\ell)}),\ (\ell = 1,\ \ldots, m), \end{aligned}$$

n 次元有限胞体複体

$$\begin{aligned} &Y = Y^{(n)} \supset X^{(n-1)} \supset \cdots \supset Y^{(1)} \supset Y^{(0)}, \\ &Y^{(\ell)} = Y^{(\ell-1)} \cup_{\varphi^\ell_Y} (D^\ell_1 \sqcup \cdots \sqcup D^\ell_{k_Y(\ell)}),\ (\ell = 1,\ \ldots,\ n) \end{aligned}$$

が与えられているとする。$X\times Y$ は、X の a 次元胞体 e_i^a, Y の b 次元胞体 e_j^b に対応する $a+b$ 次元胞体 $e_i^a\times e_j^b$ からなる胞体複体の構造を持つ。e_i^a が $\varphi_{Xi}^a:\partial D_i^a=S_i^{a-1}\longrightarrow X^{(a-1)}$, e_j^b が $\varphi_{Yj}^b:\partial D_j^b=S^{b-1}\longrightarrow Y^{(b-1)}$ で与えられているとき、$\partial(D_i^a\times D_j^b)=(\partial D_i^a)\times D_j^b\cup D_i^a\times(\partial D_j^b)$ であり、$e_i^a\times e_j^b$ は、

$$\varphi_{Xi}^a\times\iota_{D_j^b}\cup\iota_{D_i^a}\times\varphi_{Yj}^a:(\partial D_i^a)\times D_j^b\cup D_i^a\times(\partial D_j^b)\longrightarrow X^{(a-1)}\times Y^{(b)}\cup X^{(a)}\times Y^{(b-1)}$$

で与えられる。ここで、

$$\begin{aligned}&(\varphi_{Xi}^a\times\iota_{D_j^b}\cup\iota_{D_i^a}\times\varphi_{Yj}^a)(u,v)\\ =&\begin{cases}(\varphi_{Xi}^a u,\iota_Y(v))\in X^{(a-1)}\times Y^{(b)} & (u,v)\in(\partial D_i^a)\times D_j^b\\ (\iota_Y(u),\varphi_{Yj}^b u)\in X^{(a)}\times Y^{(b-1)} & (u,v)\in D_i^a\times(\partial D_j^b)\end{cases}\end{aligned}$$

さて、写像度について、$(S_i^{a-1}\times D_j^b\cup D_i^a\times S_j^{b-1},S_i^{a-1}\times S_j^{b-1})$ について

$$\begin{aligned}&H_n(S_i^{a-1}\times D_j^b\cup D_i^a\times S_j^{b-1},S_i^{a-1}\times S_j^{b-1})\\ \cong\,&H_n(S_i^{a-1}\times D_j^b,S_i^{a-1}\times S_j^{b-1})\oplus H_n(D_i^a\times S_j^{b-1},S_i^{a-1}\times S_j^{b-1})\\ \cong\,&\boldsymbol{Z}([S_i^{a-1}\times D_j^b,S_i^{a-1}\times S_j^{b-1}])\oplus\boldsymbol{Z}([D_i^{a-1}\times S_j^{b-1},S_i^{a-1}\times S_j^{b-1}])\end{aligned}$$

である。

$(\varphi_{Xi}^a\times\iota_{D_j^b}\cup\iota_{D_i^a}\times\varphi_{Yj}^a)_*([S_i^{a-1}]\times[D_j^b,\partial D_j^b])=[S_i^{a-1}]\times\partial e_j^b$, $(\varphi_{Xi}^a\times\iota_{D_j^b}\cup\iota_{D_i^a}\times\varphi_{Yj}^a)_*([D_i^a,\partial D_i^a]\times[S_j^{b-1}])=\partial e_i^a\times[S_i^{a-1}]$

この直積に対応する胞体複体は、$e_i^a\times e_j^b$ を基底とする $\boldsymbol{Z}^{k_{X^a}\times k_{Y^b}}$ を後で説明するテンソル積 $\oplus$ を用いて $e_i^a\otimes e_j^b$ を基底とする $C_a(X)\otimes C_b(Y)$ と書くとき 2 つの境界作用素 $\partial'(e_i^a\otimes e_j^b)=(\partial e_i^a)\otimes e_j^b$, $\partial''(e_i^a\otimes e_j^b)=e_i^a\otimes(\partial e_j^b)$ により記述されている。

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "\partial''"] & {} \arrow[d, "\partial''"] & {} \arrow[d, "\partial''"] & \\
0 & C_0(X)\otimes C_2(Y) \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[d, "\partial''"] & C_1(X)\otimes C_2(Y) \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[d, "\partial''"] & C_2(X)\otimes C_2(Y) \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[d, "\partial''"] & \cdots \arrow[l, "\partial'"'] \\
0 & C_0(X)\otimes C_1(Y) \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[d, "\partial''"] & C_1(X)\otimes C_1(Y) \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[d, "\partial''"] & C_2(X)\otimes C_1(Y) \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[d, "\partial''"] & \cdots \arrow[l, "\partial'"'] \\
0 & C_0(X)\otimes C_0(Y) \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[d, "\partial''"] & C_1(X)\otimes C_0(Y) \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[d, "\partial''"] & C_2(X)\otimes C_0(Y) \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[d, "\partial''"] & \cdots \arrow[l, "\partial'"'] \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

この図式は可換であり、∂', ∂'' は列の成すチェイン複体、行のなすチェイン複体のチェイン写像とも見られる。

$$\partial|(C_i(X)\otimes C_j(Y))=\partial'\oplus(-1)^j\partial'':C_i(X)\otimes C_j(Y)\longrightarrow C_{i-1}(X)\otimes C_j(Y)\oplus C_i(X)\otimes C_{j-1}(Y)$$

と定義すると $\partial\circ\partial=0$ となっている。

23.2 テンソル積

$\boldsymbol{Z}$ 上のテンソル積 $\otimes$ を考える。

命題 23.1 加群（アーベル群）の完全系列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A' \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ に対し、$A \otimes B \xrightarrow{i \otimes \mathrm{id}_B} A' \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B \longrightarrow 0$ は完全である。

証明　テンソル積は任意の双 $\boldsymbol{Z}$ 線形写像 $A \times B \longrightarrow C$ が $A \otimes B \longrightarrow C$ を一意にファクターすることで定義される。あるいは $A \otimes B = A \times B/\sim$ ($\sim$ は $n \in \boldsymbol{Z}$ に対し $(na, b) \sim (a, nb)$ から生成される同値関係) と定義される。(a, b) の同値類を $a \otimes b$ と書く。

(1)　準同型 $A \longrightarrow A'$ に対し、$a \longmapsto a'$ ならば $a \otimes b \longmapsto a' \otimes b$ だから $A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B$ が定義される。同様に、準同型 $A' \longrightarrow A''$ に対し、$A' \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B$ が定義される。このことから、$A' \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B$ は、全射である。

(2)　$K = \ker(A' \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B)$ とすると、$(i \otimes \mathrm{id}_B)(A \otimes B) \subset K$ である。
$a'' \longmapsto a' \mod i(A)$ をとることができるが、$a'' \otimes b \longmapsto a' \otimes b \mod (i \otimes \mathrm{id}_B)(A \otimes B)$ により、$A'' \otimes B \longrightarrow A' \otimes B/(i \otimes \mathrm{id}_B)(A \otimes B)$ が定義される。$A' \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B \longrightarrow A' \otimes B/(i \otimes \mathrm{id}_B)(A \otimes B)$ は射影 $A' \otimes B \longrightarrow A' \otimes B/(i \otimes \mathrm{id}_B)(A \otimes B)$ と一致するから、$K \subset (i \otimes \mathrm{id}_B)(A \otimes B)$. ■

定義 23.2 A に対し、

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{Z}^m \longrightarrow \boldsymbol{Z}^n \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

が完全となるように $\boldsymbol{Z}^m \longrightarrow \boldsymbol{Z}^n$ をとる。このとき、

$$B^m \longrightarrow B^n \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow 0$$

は完全。$\mathrm{Tor}(A, B)$ を

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(A, B) \longrightarrow B^m \longrightarrow B^n \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow 0$$

が完全となるように定義する。

23.3　キネットの公式

定理 23.3 C_*, C'_* を自由加群からなるチェイン複体とする。

$$H_n(C_* \otimes C'_*) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes H_q(C'_*) \oplus \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}(H_p(C_*), H_q(C'_*))$$

証明は

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes H_q(C'_*) \longrightarrow H_n(C_* \otimes C'_*) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}(H_p(C_*), H_q(C'_*)) \longrightarrow 0$$

が分裂する完全系列であることをしめす。

キネットの公式の証明

まず、$Z_p = \ker(\partial : C_p \longrightarrow C_{p-1})$ とし、$\overline{B}_p = \mathrm{im}(\partial : C_p \longrightarrow C_{p-1})$ とする（普通は $\overline{B}_p$ は B_{p-1} と書かれる)。このとき、

$$0 \longrightarrow Z_* \xrightarrow{i} C_* \xrightarrow{\partial} \overline{B}_* \longrightarrow 0$$

は自由加群からなるチェイン複体の短完全系列である。よって、$s_p : \overline{B}_p \longrightarrow C_p$ で $\partial \circ s_p = \mathrm{id}_{\overline{B}_p}$ となるもの、あるいは $r_p : C_p \longrightarrow Z_p$ で、$r_p \circ \partial = \mathrm{id}_{Z_p}$ とな

るものが存在する（このことを「分裂する」という)。とくに $C_p \cong Z_p \oplus \overline{B}_p$ である。

$\overline{B}_*$ は自由加群だから、完全系列

$$0 \longrightarrow Z_* \otimes C'_* \xrightarrow{i} C_* \otimes C'_* \xrightarrow{\partial} \overline{B}_* \otimes C'_* \longrightarrow 0$$

が得られる。（ここで $p : C_* \otimes C'_* \longrightarrow Z_* \otimes C'_*$ で $p \circ i = \mathrm{id}_{C_* \otimes C'_*}$ となるものがある。）これにより、長完全系列が得られる。

$$H_{n+1}(\overline{B}_* \otimes C'_*) \xrightarrow{\partial} H_n(Z_* \otimes C'_*) \longrightarrow H_n(C_* \otimes C'_*) \longrightarrow H_n(\overline{B}_* \otimes C'_*) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(Z_* \otimes C'_*)$$

ここで、

$$\begin{array}{ccc} & & \downarrow \\ Z_{p-1} \otimes C'_q & \xleftarrow{0} & Z_p \otimes C'_q \\ & & \downarrow (-1)^p \partial'' \\ & & Z_p \otimes C'_{q-1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & \downarrow \\ \overline{B}_{p-1} \otimes C'_q & \xleftarrow{0} & \overline{B}_p \otimes C'_q \\ & & \downarrow (-1)^p \partial'' \\ & & B_p \otimes C'_{q-1} \end{array}$$

であり F が自由加群のとき $H_*(F \otimes C'_*) \cong F \otimes H_*(C'_*)$ となるから、

$$\bigoplus_{p+q=n+1} \overline{B}_p \otimes H_q(C'_*) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{p+q=n} Z_p \otimes H_q(C'_*) \longrightarrow H_n(C_* \otimes C'_*) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} \overline{B}_p \otimes H_q(C'_*) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{p+q=n-1} Z_p \otimes H_q(C'_*)$$

∂ の定義をみると、$\partial = j \otimes \mathrm{id}$ $(j : \overline{B}_{p+1} = B_p \subset Z_p)$ であることがわかる。

$$\bigoplus_{p+q=n} B_p \otimes H_q(C'_*) \xrightarrow{j \otimes \mathrm{id}} \bigoplus_{p+q=n} Z_p \otimes H_q(C'_*) \longrightarrow H_n(C_* \otimes C'_*) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} B_p \otimes H_q(C'_*) \xrightarrow{j \otimes \mathrm{id}} \bigoplus_{p+q=n-1} Z_p \otimes H_q(C'_*)$$

従って、完全系列 $0 \longrightarrow \mathrm{coker}(j \otimes \mathrm{id}) \longrightarrow H_n(C_* \otimes C'_*) \longrightarrow \ker(j \otimes \mathrm{id}) \longrightarrow 0$ を得る。

$$0 \longrightarrow B_p \longrightarrow Z_p \longrightarrow H_p(C_*) \longrightarrow 0$$

から、$H_q(C'_*) = H'_q$ と書いて $\mathrm{coker}(j \otimes \mathrm{id}) \cong H_p(C_*) \otimes H'_q$、また Tor の定義により、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_p, H'_q) \longrightarrow B_p \otimes H'_q \xrightarrow{j \otimes \mathrm{id}} Z_p \otimes H'_q \longrightarrow H_p(C_*) \otimes H'_q \longrightarrow 0$$

従って、$\ker(j \otimes \mathrm{id}) = \mathrm{Tor}(H_p, H'_q)$ を得る。次元に注意してまとめて、キネットの公式のうちの完全系列を得る。

分裂することを示すために、$r_p : C_p \longrightarrow Z_p$ と同様に $r'_q : C'_q \longrightarrow Z'_q$ $(r'_q \circ i = \mathrm{id}_{Z'_q})$ をとる。$C_* \otimes C'_*$ の元 c で、$c = \partial c'$ と書かれるものをとると、

$$c' = \sum_{p+q=n+1} \sum_{i_{p,q}} a_{p,q}^{i_{p,q}} c_p^{i_{p,q}} \otimes c_q^{i_{p,q}}$$

のように書かれ、

$$\begin{aligned} &(r \otimes r')c = (r \otimes r')(\partial' c' \pm \partial'' c') \\ &= (r \otimes r') \left(\sum_{p+q=n+1} \sum_{i_{p,q}} a_{p,q}^{i_{p,q}} \partial c_p^{i_{p,q}} \otimes c_q^{i_{p,q}} + \sum_{p+q=n+1} \sum_{i_{p,q}} (-1)^p a_{p,q}^{i_{p,q}} c_p^{i_{p,q}} \otimes \partial c_q^{i_{p,q}} \right) \\ &= \sum_{p+q=n+1} \sum_{i_{p,q}} a_{p,q}^{i_{p,q}} \partial c_p^{i_{p,q}} \otimes r'(c_q^{i_{p,q}}) + \sum_{p+q=n+1} \sum_{i_{p,q}} (-1)^p a_{p,q}^{i_{p,q}} r(c_p^{i_{p,q}}) \otimes \partial c_q^{i_{p,q}} \\ &\in \bigoplus_{p+q=n} (B_p \otimes Z_q) \oplus \bigoplus_{p+q=n} (Z_p \otimes B_q) \end{aligned}$$

従って、$[(r \otimes r')c] = 0 \in \bigoplus_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes H_q(C'_*)$ となって、$R : H_n(C_* \otimes C'_*) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes H_q(C'_*)$ が定義されるが、$(r \otimes r') \circ (i \otimes i') = \mathrm{id}_{Z_* \otimes Z'_*}$ だから、$R \circ I = \mathrm{id}_{\bigoplus_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes H_q(C'_*)}$ となる。従って完全系列は分裂する。

23.4 普遍係数定理

体を係数とするホモロジー群を考えたのと同様にアーベル群 G を係数とするホモロジー群を考えることができるが、それは、自由加群からなるチェイン複体 C_* についてチェイン複体 $C_* \otimes A$ をつくり、そのホモロジー群を計算することである。

キネットの公式を用いて $H_*(C_*)$ から $H_*(C_* \otimes A)$ を求めることができる。

すなわち、チェイン複体 $0 \longleftarrow G \longleftarrow 0$ と

$$C_* : 0 \xleftarrow{\partial_0} C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_2} \cdots \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} 0$$

のテンソル積のホモロジー群を考えればよい。

このときのキネットの公式により、

$$0 \longrightarrow H_n(C_*) \otimes G \longrightarrow H_n(C_* \otimes G) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C_*), G) \longrightarrow 0$$

は分裂する完全系列である。

24 コホモロジー群

24.1 コチェイン複体

チェイン複体

$$C_* : 0 \xleftarrow{\partial_0} C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_2} \cdots \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} 0$$

を行列の並んだものと考えると、∂_ℓ は C_ℓ の k_ℓ 次元の列ベクトルに作用し、$C_{\ell-1}$ の $k_{\ell-1}$ 次元の列ベクトルを与えている。この行列は、$k_{\ell-1}$ 次元の行ベクトルに作用し、k_ℓ 次元の行ベクトルを与えることもできる。k_ℓ 次元の整数行ベクトルの空間を C^k とすると、

$$C_* : 0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\delta_0} C^1 \xrightarrow{\delta_1} \cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^n \longrightarrow 0$$

が得られる。$\delta_{\ell-1}$ は ∂_ℓ と同じ行列である。($\delta_{\ell-1}$ を列ベクトルに作用させようとすると ∂_ℓ の転置行列である。)行ベクトルをみることは、C_ℓ 上の $\boldsymbol{Z}$ 値線形形式の全体をみるということであり、$C^\ell = \mathrm{Hom}(C_\ell, \boldsymbol{Z})$ を考えているということである。

上の系列について、$\delta \circ \delta = 0$ であり、コチェイン複体と呼ばれる。

コチェイン複体から $\ker \delta / \operatorname{im} \delta$ として得られる群をコホモロジー群と呼び、$H^*(C^*)$ と書く。

行列を標準形にしたものが、$\delta_\ell : C^\ell \longrightarrow C^{\ell+1}$ をあたえているが、δ_ℓ は $\partial_{\ell+1}$ を表す行列であった。$C^\ell = \boldsymbol{Z}^{p_{\ell+1}} \oplus \boldsymbol{Z}^{q_{\ell+1}} \oplus \boldsymbol{Z}^{k_\ell-(p_{\ell+1}+q_{\ell+1})}$, $C^{\ell-1} = \boldsymbol{Z}^{p_\ell} \oplus \boldsymbol{Z}^{q_\ell} \oplus \boldsymbol{Z}^{k_{\ell-1}-(p_\ell+q_\ell)}$ において、$\ker \delta_\ell = \boldsymbol{0} \oplus \boldsymbol{0} \oplus \boldsymbol{Z}^{k_\ell-(p_{\ell+1}+q_{\ell+1})}$ が $\operatorname{im} \delta_{\ell-1}$ を含み、

$$H^\ell(C^*) \cong \boldsymbol{Z}^{k_\ell-(p_{\ell+1}+q_{\ell+1})-(p_\ell+q_\ell)} \oplus \bigoplus_{i=1}^{q_\ell} \boldsymbol{Z}/m_i^\ell \boldsymbol{Z}$$

となる。すなわち、$\mathrm{rank}(H^\ell(C^*)) = \mathrm{rank}(H_\ell(C_*))$ であり、$H^\ell(C^*)$ の有限位数の元のなす部分群 $\mathrm{torsion}(H^\ell(C^*))$ は $H_{\ell-1}(C^*)$ の有限位数の元のなす部分群 $\mathrm{torsion}(H_{\ell-1}(C_*))$ に同型である:$\mathrm{torsion}(H^\ell(C^*)) \cong \mathrm{torsion}(H_{\ell-1}(C_*))$.

これは、普遍係数定理の一部分として次のように Ext を用いて定式化されている。

定義 24.1 有限生成アーベル群 A に対し、$0 \longrightarrow \boldsymbol{Z}^m \longrightarrow \boldsymbol{Z}^n \longrightarrow A \longrightarrow 0$ が完全系列となるように $\boldsymbol{Z}^m \longrightarrow \boldsymbol{Z}^n$ をとる。このとき、$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}^n,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}^n,B)$ は完全系列である。$\mathrm{Ext}(A,B)$ を

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}^n,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}^n,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}(A,B) \longrightarrow 0$$

が完全となることで定義する。

このとき、$\mathrm{Ext}(A,\boldsymbol{Z}) \cong \mathrm{torsion}(A)$ である。

定理 24.2 アーベル群 G に対し、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{n-1}(C_*),G) \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}(C_*,G)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(C_*),G) \longrightarrow 0$$

は分裂する完全系列である。

これはコチェイン複体 $0 \longrightarrow G \longrightarrow 0$ への線形写像全体をとったと考えることができて、次の一般化が得られる。

C_* をチェイン複体、C'^* をコチェイン複体として、$\mathrm{Hom}(C_p,C'^q)$ を考えると、$\mathrm{Hom}(C_p,C'^q) \ni c : C_p \longrightarrow C^q$ に対し、$(\delta' c)(a) = c(\partial a)$, $(\delta'' c)(a) = \delta''(c(a))$ により、２重複体の構造が得られる。$\delta = \delta' + (-1)^p\delta''$ として、

$$\delta : \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}(C_p,C'^q) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \mathrm{Hom}(C_p,C'^q)$$

が定まり、$\delta \circ \delta = 0$ である。キネットの公式の証明と同様にして、次の定理が示される。

定理 24.3

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Ext}(H_p(C_*),H^q(C'^*)) \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}(C_*,C'^*)) \\ & \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}(H_p(C_*),H^q(C'^*)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

は分裂する完全系列である。

この定理で、$C'^* = \mathrm{Hom}(C_*,\boldsymbol{Z})$ であるときは、

$$\mathrm{Hom}(C_*,C'^*) = \mathrm{Hom}(C_*,\mathrm{Hom}(C'_*,\boldsymbol{Z})) \cong \mathrm{Hom}(C_* \otimes C'_*,\boldsymbol{Z})$$

である。従って、$H^n(\mathrm{Hom}(C_*,C'^*)) \cong H^n((C_* \otimes C'_*)^*)$ である。

これは、ホモロジーは Tor, コホモロジーは Ext という標語にあっているものである。

定理の証明は次のようになる。

$$0 \longrightarrow Z_* \xrightarrow{i} C_* \xrightarrow{\partial} \overline{B}_* \longrightarrow 0$$

という自由加群からなるチェイン複体の短完全列を考える。これは分裂している。$\overline{B}_*$ は自由加群だから、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\overline{B}_*,C'^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_*,C'^*) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}(Z_*,C'^*) \longrightarrow 0$$

は, 完全系列である。ゆえにこれにより、コホモロジー群の長完全系列が得られる。

$$H^{n-1}(\mathrm{Hom}(Z_*,C'^*)) \xrightarrow{\delta} H^n(\mathrm{Hom}(\overline{B}_*,C'^*)) \to H^n(\mathrm{Hom}(\overline{C}_*,C'^*)) \xrightarrow{i^*} H^n(\mathrm{Hom}(Z_*,C'^*)) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(\mathrm{Hom}(\overline{B}_*,C'^*))$$

ここで、

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(Z_p, C'^{q+1}) & & \\ \uparrow (-1)^p\delta'' & & \\ \mathrm{Hom}(Z_p, C'^q) & \xrightarrow{0} & \mathrm{Hom}(Z_{p+1}, C'^q) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\overline{B}_p, C'^{q+1}) & & \\ \uparrow (-1)^p\delta'' & & \\ \mathrm{Hom}(\overline{B}_p, C'^q) & \xrightarrow{0} & \mathrm{Hom}(\overline{B}_{p+1}, C'^q) \end{array}$$

であり F が自由加群のとき $H_*(\mathrm{Hom}(F, C'^*)) \cong \mathrm{Hom}(F, H^*(C'^*))$ となるから、

$$\bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Hom}(Z_p, H^q(C'^*)) \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}(\overline{B}_p, H^q(C'^*)) \to H^n(\mathrm{Hom}(\overline{C}_*, C'^*))$$
$$\xrightarrow{i^*} \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}(Z_p, H^q(C'^*)) \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{p+q=n+1} \mathrm{Hom}(\overline{B}_p, H^q(C'^*))$$

δ の定義をみると、$\delta = \mathrm{Hom}(j, \mathrm{id})$ $(j : \overline{B}_{p+1} = B_p \subset Z_p)$ であることがわかる。

$$\bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Hom}(Z_p, H^q(C'^*)) \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Hom}(B_p, H^q(C'^*)) \to H^n(\mathrm{Hom}(\overline{C}_*, C'^*))$$
$$\xrightarrow{i^*} \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}(Z_p, H^q(C'^*)) \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}(B_p, H^q(C'^*))$$

従って完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}(j, \mathrm{id})) \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}(\overline{C}_*, C'^*)) \longrightarrow \ker(\mathrm{Hom}(j, \mathrm{id})) \longrightarrow 0$$

が得られる。

$$0 \longrightarrow B_p \longrightarrow Z_p \longrightarrow H_p(C_*) \longrightarrow 0$$

から、$H_q(C'^*) = H'^q$ と書いて $\ker(\mathrm{Hom}(j, \mathrm{id})) \cong \mathrm{Hom}(H_p(C_*), H'^q)$、また Ext の定義により、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_p, H'_q) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z_p, H'_q) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(j,\mathrm{id})} \mathrm{Hom}(B_p, H'_q) \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_p(C_*), H'_q) \longrightarrow 0$$

従って、$\mathrm{coker}(\mathrm{Hom}(j, \mathrm{id})) \cong \mathrm{Ext}(H_p, H'_q)$ を得る。次元に注意してまとめて、完全系列を得る。分裂することの証明は省略する。

実際には、C_*, C'_* を有限生成自由アーベル群とすると、次の同型も存在する。

$$\mathrm{Hom}(C_* \otimes C'_*, \boldsymbol{Z}) \cong \mathrm{Hom}(C_*, \boldsymbol{Z}) \otimes \mathrm{Hom}(C'_*, \boldsymbol{Z})$$

すなわち、$(C_* \otimes C'_*)^* \cong C^* \otimes C'^*$ である。ホモロジー群のキネットの公式の証明とバウンダリー準同型がコバウンダリー準同型になることを除き全く同様にして次の分裂する完全系列が得られる。

定理 24.4

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H^p(C^*) \otimes H^q(C'^*) \xrightarrow{I} H^n(C^* \otimes C'^*)$$
$$\longrightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \mathrm{Tor}(H^p(C^*), H^q(C'^*)) \longrightarrow 0$$

は分裂する完全系列である。

カップ積の定義にはこちらを用いる。

コホモロジー群の最大の特徴は、2つのチェイン複体 C_*, C'_* の間のチェイン写像 $F : C_* \longrightarrow C'_*$ に対し、$F^* : \mathrm{Hom}(C'_*, \boldsymbol{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_*, \boldsymbol{Z})$, すなわち

$F^*: C'^* \longrightarrow C^*$ の方向にコチェイン写像（すなわち，$F^* \circ \delta = \delta \circ F^*$ となる準同型写像）が定義されることである。従って、準同型写像 $F^*: H^*(C'^*) \longrightarrow H^*(C^*)$ が定義される。

胞体複体 X に付随するチェイン複体 $C_*(X)$ に対して、$\mathrm{Hom}(C_*(X), \boldsymbol{Z}) = C^*(X)$ が胞体複体 X に付随するコチェイン複体として定義される。コチェイン複体 $C^*(X)$ のコホモロジー群を $H^*(X)$ と書く。

胞体複体 X, Y と胞体写像 $F: X \longrightarrow Y$ に対して、チェイン写像 $F_*: C_*(X) \longrightarrow C_*(Y)$ が定義されるとともに、コチェイン写像 $F^*: C^*(Y) \longrightarrow C^*(X)$ が定義される。

ここで、胞体写像 $F: X \longrightarrow Y$, $G: Y \longrightarrow Z$ に対して、胞体写像 $G \circ F: X \longrightarrow Z$ がえられるが、ホモロジー群については $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*: H_*(X) \longrightarrow H_*(Z)$ を満たす（共変関手）のに対しこホモロジー群については $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*: H^*(Z) \longrightarrow H^*(X)$ を満たす（反変関手)。

24.2　コホモロジー理論の公理

コホモロジー理論を公理的に展開することもできる。そのときの公理は、

- （位相空間対，連続写像）から（次数つき $\boldsymbol{Z}$ 加群，準同型写像）への反変関手である。
- 連続写像がホモトピックなら誘導される準同型は一致する。（ホモトピー公理）
- 対のコホモロジー完全系列があり、連結準同型は自然性を持つ。

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\delta^*} H^\ell(X,Y) \xrightarrow{j^*} H^\ell(X) \xrightarrow{i^*} H^\ell(Y) \\ \xrightarrow{\delta^*} H^{\ell+1}(X,Y) \xrightarrow{j^*} H^{\ell+1}(X) \xrightarrow{i^*} H^{\ell+1}(Y) \end{array}$$

- $X \supset A \supset B$, A 開集合、B 閉集合のとき、$H^*(X \setminus B, A \setminus B) \cong H^*(X, A)$（切除公理）
- $H^*(1\text{点}) \cong \boldsymbol{Z}\ (* = 0), \cong 0\ (* \neq 0)$.（次元公理）

24.3　カップ積

準同型の向きが変わったことにより、コホモロジー群の上には積構造が定義され、コホモロジー環、あるいはコホモロジー代数と呼ばれる。積はカップ積と呼ばれる。定義は簡単である。

$D: X \longrightarrow X \times X$ を対角写像とする。$D(x) = (x, x)$ である。$D^*: H^*(X \times X) \longrightarrow H^*(X)$ が得られるが、キネットの公式によれば、$H^*(X) \otimes H^*(X) \longrightarrow H^*(X \times X)$ が存在する。これらの準同型の結合として得られる準同型写像をカップ積と呼ぶ。

$$\cup: \bigoplus_{p+q=n} H^p(X) \otimes H^q(X) \longrightarrow H^{p+q}(X)$$

25　問題の解答

【問題 21.1 の解答】 $\partial D^{n-1} \longrightarrow e^0$ を定値写像として $S^{n-1} = e^0 \cup e^{n-1}$ とする。$S^{n-1} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\} \subset \boldsymbol{R}^n$, $D^n = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq 1\} \subset \boldsymbol{R}^n$, $S^n = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\} \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ とし、$\iota_{D_1^n}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, -\sqrt{1-\|\boldsymbol{x}\|^2})$, $\iota_{D_2^n}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \sqrt{1-\|\boldsymbol{x}\|^2})$ により、胞体分割を与える。

マイヤー・ビエトリス完全系列は、

$$
\begin{array}{lllllll}
\xrightarrow{\Delta_*} & H_n(S^{n-1}) & \xrightarrow{(i_{1*},i_{2*})} & H_n(S^n_-) \oplus H_n(S^n_+) & \xrightarrow{j_{1*}-j_{2*}} & H_n(S^n) & \\
\xrightarrow{\Delta_*} & H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{(i_{1*},i_{2*})} & H_{n-1}(S^n_-) \oplus H_{n-1}(S^n_+) & \xrightarrow{j_{1*}-j_{2*}} & H_{n-1}(S^n) & \\
\xrightarrow{\Delta_*} & \cdots & & & & & \\
 & & & \cdots & \xrightarrow{j_{1*}-j_{2*}} & H_2(S^n) & \\
\xrightarrow{\Delta_*} & H_1(S^{n-1}) & \xrightarrow{(i_{1*},i_{2*})} & H_1(S^n_-) \oplus H_1(S^n_+) & \xrightarrow{j_{1*}-j_{2*}} & H_1(S^n) & \\
\xrightarrow{\Delta_*} & H_0(S^{n-1}) & \xrightarrow{(i_{1*},i_{2*})} & H_0(S^n_-) \oplus H_0(S^n_-) & \xrightarrow{j_{1*}-j_{2*}} & H_0(S^n) & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

$H_\ell(S^n_\pm) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (\ell = 0) \\ 0 & (\ell \neq 0) \end{cases}$, $H_\ell(S^{n-1}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (\ell = 0,\ n-1) \\ 0 & (\ell \neq 0,\ n-1) \end{cases}$ により、$H_n(S^n) \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \boldsymbol{Z}$ である。また、$H_0(S^{n-1})$, $H_0(S^n_-)$, $H_0(S^n_-)$ の生成元は e^0 であるから、$H_0(S^n) \cong \boldsymbol{Z}$ で生成元は e^0 である。

【問題 21.2 の解答】 D^{m+1}, D^{n+1} は、それぞれ $e^0 \cup e^m \cup e^{m+1}$, $e^0 \cup e^n \cup e^{n+1}$ という胞体分割を持つ。従って、$D^{m+1} \times D^{n+1}$ は $e^0 = e^0 \times e^0$, $e^m = e^m \times e^0$, $e^{m+1} = e^{m+1} \times e^0$, $e^n = e^0 \times e^n$, $e^{n+1} = e^0 \times e^{n+1}$, $e^{m+n} = e^m \times e^n$, $e_1^{m+n+1} = e^{m+1} \times e^n$, $e_2^{m+n+1} = e^m \times e^{n+1}$, $e^{m+n+2} = e^{m+1} \times e^{n+1}$ による胞体分割を持つ。これにより、

$$\partial(D^{m+1} \times D^{n+1}) = e^0 \cup e^m \cup e^n \cup e^{m+1} \cup e^{n+1} \cup e^{m+n} \cup e_1^{m+n+1} \cup e_2^{m+n+1}$$

と胞体分割される。チェイン複体の生成元として $\partial e^{m+1} = e^m$, $\partial e^{n+1} = e^n$ ととられている。また、これに付随するチェイン複体において $0 \xleftarrow{\partial} \boldsymbol{Z}e^{m+n} \xleftarrow{\partial} \boldsymbol{Z}e_1^{m+n+1} \oplus \boldsymbol{Z}e_2^{m+n+1} \xleftarrow{\partial} 0$ が得られる。ここで、

$$
\begin{aligned}
\partial e_1^{m+n+1} &= \partial(e^{m+1} \times e^n) = e^m \times e^n, \\
\partial e_2^{m+n+1} &= \partial(e^m \times e^{n+1}) = (-1)^{m-1} e^m \times e^n
\end{aligned}
$$

である。

マイヤー・ビエトリス完全系列は、

$$
\begin{array}{llllll}
\xrightarrow{\Delta_*} & H_{m+n+1}(S^m \times S^n) & \xrightarrow{(i_{1*},i_{2*})} & H_{m+n+1}(S^m \times D^{n+1}) \oplus H_{m+n+1}(D^{m+1} \times S^n) & \xrightarrow{j_{1*}-j_{2*}} & H_{m+n+1}(S^{m+n+1}) \\
\xrightarrow{\Delta_*} & H_{m+n}(S^m \times S^n) & \xrightarrow{(i_{1*},i_{2*})} & H_{m+n}(S^m \times D^{n+1}) \oplus H_{m+n}(D^{m+1} \times S^n) & \xrightarrow{j_{1*}-j_{2*}} & H_{m+n}(S^{m+n+1})
\end{array}
$$

これは

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 0 & \longmapsto & 0 \oplus 0 & \longmapsto & \boldsymbol{Z}[e_1^{m+n+1} + e_2^{m+n+1}] \\
\longmapsto & \boldsymbol{Z}[e^{m+n}] & \longmapsto & 0 \oplus 0 & &
\end{array}
$$

である。$m \neq n$ ならば、$[e^m] \longmapsto [e^m]$, $[e^n] \longmapsto [e^n]$ による同型 $H_m(S^m \times S^n) \xrightarrow{(i_{1*},i_{2*})} H_m(S^m \times D^{n+1}) \oplus H_m(D^{m+1} \times S^n) \cong \boldsymbol{Z}[e^m] \oplus 0$, $H_n(S^m \times S^n) \xrightarrow{(i_{1*},i_{2*})} H_n(S^m \times D^{n+1}) \oplus H_n(D^{m+1} \times S^n) \cong 0 \oplus \boldsymbol{Z}[e^n]$ がある。$m = n$ ならば、同型 $H_m(S^m \times S^m) \xrightarrow{(i_{1*},i_{2*})} H_m(S^m \times D^{m+1}) \oplus H_m(D^{m+1} \times S^m) \cong \boldsymbol{Z}[e_1^m] \oplus \boldsymbol{Z}[e_2^m]$, を得る。