この章では、これまでの章で導入したホモトピー群、ホモロジー群などを用いて空間の位相を研究するための基本的な事項を述べる。証明を書ききれないものについては、参考文献を参照されると良い。

36 ファイバー空間のホモトピー完全列（展開）

ファイバー空間とは、位相空間 $E,\ B$ と、その間の連続写像 $p : E \longrightarrow B$ で、次をみたすもののことである。

- k 次元立方体 I^k に対し、連続写像 $H_0 : \{0\}\times I^k \longrightarrow E,\ h : [0,1]\times I^k \longrightarrow B$ で、$p \circ H_0 = f|\{0\} \times I^k$ をみたすものが与えられたとき、$p \circ H = h$ をみたす連続写像 $H : [0,1] \times I^k \longrightarrow E$ が存在する。

これを、立方体に対する被覆ホモトピー性質と呼ぶ。

位相空間 $E,\ B$ はファイバー空間の全空間、底空間と呼ばれ、連続写像 $p : E \longrightarrow B$ は、射影と呼ばれる。射影は全射となる。底空間 B の点 b の逆像 $F_b = p^{-1}(b)$ を b 上のファイバーと呼ぶ。

点 $e \in F_b$ をとると、包含写像 $i : (F_b, e) \longrightarrow (E, e)$, 射影 $p : (E, e) \longrightarrow (B, b)$ は基点付き空間の間の写像となり、ホモトピー群の間の準同型 $i_* : \pi_k(F_b, e) \longrightarrow \pi_k(E, e),\ p_* : \pi_k(E, e) \longrightarrow \pi_k(B, b)$ を誘導する。さらに準同型 $\partial_* : \pi_{k+1}(B, b) \longrightarrow \pi_k(F_b, e)$ を次で定義する。

$h : I^{k+1} = [0,1] \times I^k \longrightarrow B,\ h(\partial I^{k+1}) = b,\ H_0 : \{0\} \times I^k \longrightarrow E,\ H_0(\{0\} \times I^k) = e$ に対して存在する $H : [0,1] \times I^k \longrightarrow E$ で、$p \circ H = h$ をみたすものをとる。

【問題 36.1】 底空間 B が弧状連結のとき、2 点 $b_0, b_1 \in B$ 上のファイバーの連結成分の間の全単射が存在して、対応する連結成分のホモトピー群は同型になることを示せ。

定理 36.2 (ファイバー空間のホモトピー完全系列) $p : E \longrightarrow B$ をファイバー空間とする。ホモトピー群についての次の系列は完全系列である。

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{k+1}(B,b) \\
\xrightarrow{\Delta_*} & \pi_k(F,e) & \xrightarrow{i_*} & \pi_k(E,e) & \xrightarrow{p_*} & \pi_k(B,b) \\
\xrightarrow{\Delta_*} & \pi_{k-1}(F,e) & \longrightarrow & \cdots & & \\
 & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_2(B,b) \\
\xrightarrow{\Delta_*} & \pi_1(F,e) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(E,e) & \xrightarrow{p_*} & \pi_1(B,b) \\
\xrightarrow{\Delta_*} & \pi_0(F,e) & & & &
\end{array}
$$

37 ファンカンペンの定理の証明

次の群の完全列があることを示す。

$$1 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b) \longrightarrow \pi_1(X, b) \longrightarrow 1$$

ここで、$\pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b)$ は群の自由積、$\mathcal{N}$ は、$\pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b)$ の部分集合 $\{i_{1*}\alpha(i_{2*}\alpha)^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(U_{12}, b)\}$ を含む最小の正規部分群である。

(1) $f : ([0,1], \{0,1\}) \longrightarrow (U_1 \cup U_2, b)$ に対し、$f^{-1}(U_1),\ f^{-1}(U_2)$ に対するルベーグ数を考えると、十分大きな自然数 N に対し、$[0,1]$ 区間を N 等分すると、$[\dfrac{m-1}{N}, \dfrac{m}{N}]$ の像は U_1 または U_2 に含まれる。$f(\dfrac{m}{N})$ が $U_1 \setminus U_{12}$,

$U_2 \setminus U_{12}$, U_{12} の点の時、$f(\dfrac{m}{N})$ と b を結ぶ曲線 γ_m を U_1, U_2, U_{12} 内に取る。$f|[\dfrac{m-1}{N}, \dfrac{m}{N}] = f_m$ とおいて、

$$f \simeq f_1 \natural \overline{\gamma_1} \natural \gamma_1 \natural f_2 \natural \overline{\gamma_2} \natural \gamma_2 \natural f_3 \natural \overline{\gamma_3} \natural \ldots \natural \gamma_{N-1} \natural f_N$$

とすると $\gamma_{m-1} \natural f_m \natural \overline{\gamma_m}$ は U_1 または U_2 のループである。これから自由積からの全射があることがわかる。

(2)　自由積として得られた $f : ([0,1], \{0,1\}) \longrightarrow (U_1 \cup U_2, b)$ が b への定値写像にホモトピックとすると、写像 $F : [0,1]^2 \longrightarrow U_1 \cup U_2$ で、$F(1,t) = f(t)$, $F(0,t) = b$, $F(s,0) = F(s,1) = b$ をみたすものが存在する。$F^{-1}(U_1)$, $F^{-1}(U_2)$ についてのルベーグ数を考えると、十分大きな自然数 N に対し、正方形 $[0,1]^2$ を N^2 等分すると、$[\dfrac{m-1}{N}, \dfrac{m}{N}] \times [\dfrac{n-1}{N}, \dfrac{n}{N}]$ の像は U_1 または U_2 に含まれる。$F(\dfrac{m}{N}, \dfrac{n}{N})$ が $U_1 \setminus U_{12}$, $U_2 \setminus U_{12}$, U_{12} の点の時、$F(\dfrac{m}{N}, \dfrac{n}{N})$ と b を結ぶ曲線 γ_{mn} を U_1, U_2, U_{12} 内に取る。この γ_{mn} を使って、F をホモトピーで変形して、$G(\dfrac{m}{N}, \dfrac{n}{N}) = b$ となる写像 $G : [0,1]^2 \longrightarrow U_1 \cup U_2$ をつくる。$G(1,t) = f_{N1} \natural \ldots \natural f_{NN}$ の f_{Nn} は、$\pi_1(U_1, b)$ または $\pi_1(U_2, b)$ の元を表すが、この書き方は、もとの f を $\pi_1(U_1, b)$ または $\pi_1(U_2, b)$ の関係式で書き換えたものである。($[f]$ と自由積の中で同じ元である。)

小正方形は U_1, U_2 のいずれかに写されるから、隣り合う小正方形の共通部分となる辺は、小正方形がともに U_1 または U_2 に写されれば、U_1 または U_2 に写され、一方が U_1、他方が U_2 に写されるときには、U_{12} に写される。このとき、この辺に対応する $\alpha \in \pi_1(U_{12}, b)$ をとると、U_1 に写る正方形の側では、この元を $\pi_1(U_1, b)$ の元と見た $i_{1*}\alpha$ と書き、U_2 に写る正方形の側では、$\pi_1(U_2, b)$ の元と見た $i_{2*}\alpha$ と書いているはずである。

図のように、辺からの写像に、それぞれの小正方形の側から名前が付けられているとする。f_{mn}, g_{mn}, h_{mn}, k_{mn} は、それぞれ小正方形の写る先の $\pi_1(U_1, b)$ または $\pi_1(U_2, b)$ の元を表す。

小正方形によるホモトピーによって、$f_{mn} \simeq \overline{k_{m,n-1}} \natural g_{m-1,n} \natural h_{mn}$ であるが、これは小正方形が写される U_1, U_2 の基本群 $\pi_1(U_1, b)$, $\pi_1(U_2, b)$ のなかの関係式である。一方、$h_{m,n} \natural \overline{k_{m,n}}$, $\overline{f_{m,n}} \natural g_{m,n}$ は、その辺の両側が、ともに U_1 または U_2 に写されていれば、$\pi_1(U_1, b)$, $\pi_1(U_2, b)$ のなかの関係式であるが、その辺の一方が U_1、他方が U_2 に写されるときには、その辺のあらわす $\alpha \in \pi_1(U_{12}, b)$ を使って $i_{1*}\alpha (i_{2*}\alpha)^{-1}$ の形にかかれている。

次のように変形すると、$f_{N1} \natural f_{N2} \natural \ldots \natural f_{NN}$ は $g_{N-1,1} \natural g_{N-1,2} \natural \ldots \natural g_{N-1,N}$ に $\mathcal{N}$ の元を掛けたものである事がわかる。

$$\begin{aligned}
& f_{N1} \natural f_{N2} \natural \ldots \natural f_{NN} \\
\simeq\ & (g_{N-1,1} \natural h_{N1}) \natural (\overline{k_{N1}} \natural g_{N-1,2} \natural h_{N2}) \natural \ldots \natural (\overline{k_{N,N-1}} \natural g_{N-1,N}) \\
=\ & g_{N-1,1} \natural (h_{N1} \natural \overline{k_{N1}}) \natural g_{N-1,2} \natural h_{N2} \natural \ldots \natural (h_{N,N-1} \natural \overline{k_{N,N-1}}) \natural g_{N-1,N} \\
\simeq\ & g_{N-1,1} \natural g_{N-1,2} \natural \ldots \natural g_{N-1,N} \\
& \quad \natural \overline{g_{N-1,2} \natural \ldots \natural g_{N-1,N}} \natural (h_{N1} \natural \overline{k_{N1}}) \natural g_{N-1,2} \natural \ldots \natural g_{N-1,N} \\
& \quad \natural \overline{g_{N-1,3} \natural \ldots \natural g_{N-1,N}} \natural \ldots \\
& \quad \natural \overline{g_{N-1,N}} \natural (h_{N,N-1} \natural \overline{k_{N,N-1}}) \natural g_{N-1,N}
\end{aligned}$$

さらに次のように変形すると、$g_{N-1,1} \natural g_{N-1,2} \natural \ldots \natural g_{N-1,N}$ は $f_{N-1,1} \natural f_{N-1,2} \natural \ldots \natural f_{N-1,N}$

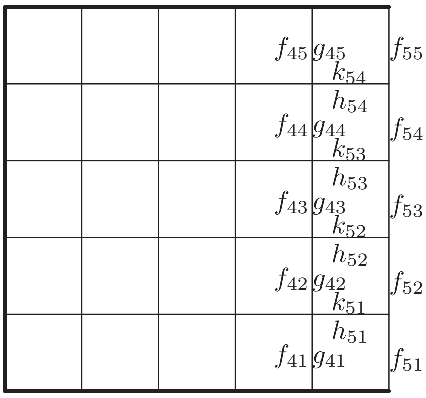

図 16: ファンカンペンの定理

に $\mathcal{N}$ の元を掛けたものである事がわかる。

$$
\begin{aligned}
& g_{N-1,1}\natural g_{N-1,2}\natural\cdots\natural g_{N-1,N} \\
\simeq\ & f_{N-1,1}\natural f_{N-1,2}\natural\cdots\natural f_{N-1,N} \\
& \quad \natural\overline{f_{N-1,2}\natural\cdots\natural f_{N-1,N}}(\overline{f_{N-1,1}}\natural g_{N-1,1})\natural f_{N-1,2}\natural\cdots\natural f_{N-1,N} \\
& \quad \natural\overline{f_{N-1,3}\natural\cdots\natural f_{N-1,N}}(\overline{f_{N-1,2}}\natural g_{N-1,2})\natural f_{N-1,3}\natural\cdots\natural f_{N-1,N}\natural\cdots \\
& \quad \natural(\overline{f_{N-1,N}}\natural g_{N-1,N})
\end{aligned}
$$

これを続けると、$g_{1,1}\natural g_{1,2}\natural\cdots\natural g_{1,N}$ は b への定値写像で単位元を表すから、もとの元は $\mathcal{N}$ の元であったことがわかる。

38 有限胞体複体の基本群（展開）

作業中

39 問題の解答

【問題 36.1 の解答】 作業中