２０１０年度幾何学特別演習 II　問題　　１１月１７日

演習問題５－１． 位相空間 X が交わりを持たない開集合 U, V の和集合のとき、$H_*(U \sqcup V) = H_*(U) \oplus H_*(V)$ を示せ.
ヒント：$(U \sqcup V, V)$, (V, V), $(U, \emptyset)$ のホモロジー完全列を比較する。

演習問題５－２． 空でない位相空間 X の 0 次元のホモロジー群 $H_0(X)$ から、$\mathbf{Z}$ に全射が存在することを示せ。

演習問題５－３． n 次元閉球体 D^n と $x \in D^n$ に対し、$H_k(D^n, D^n \setminus \{x\})$ を求めよ。

演習問題５－４． 正方形 Q の 4 つの辺のうちの 2 つをとり、辺と辺とを同相写像で同一視する。残りの 2 つの辺を同相写像で同一視する。得られる空間は何通りあるか。同相なものは１つと数える。
ヒント：隣り合わせの辺を同一視するか、向かい合わせの辺を同一視するかで、分け、同一視が正方形から導かれる辺の向きを保つか保たないかで分類する。

演習問題５－５． 演習問題５－４で得られた空間のホモロジー群を求めよ。

問題５－６． (1) 演習問題５－４で得られた空間は２次元微分可能多様体と同相になることを示せ。
(2) 演習問題５－４で得られた２次元多様体は向き付け可能かどうか判定せよ。

問題５－７． 正６角形 H の６つの辺を２つずつ組にして、組にした２辺を同相写像で同一視する。得られる空間は何通りあるか。同相なものは１つと数える。
得られたそれぞれの空間のホモロジー群を求めよ。