

定義 [チェック・ドラム複体]  $\{U_i\}_{i=1,\dots,N}$  をコンパクト  $n$  次元多様体  $M$  の開被覆とする。 $1 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq N$  に対し、 $U_{i_0 i_1 \dots i_k} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$  において、次の可換図式をチェック・ドラム複体と呼ぶ。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 0 \rightarrow \Omega^3(M) & \xrightarrow{r} & \bigoplus_i \Omega^3(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0 < i_1} \Omega^3(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0 < i_1 < i_2} \Omega^3(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 0 \rightarrow \Omega^2(M) & \xrightarrow{r} & \bigoplus_i \Omega^2(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0 < i_1} \Omega^2(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0 < i_1 < i_2} \Omega^2(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 0 \rightarrow \Omega^1(M) & \xrightarrow{r} & \bigoplus_i \Omega^1(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0 < i_1} \Omega^1(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0 < i_1 < i_2} \Omega^1(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 0 \rightarrow \Omega^0(M) & \xrightarrow{r} & \bigoplus_i \Omega^0(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0 < i_1} \Omega^0(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0 < i_1 < i_2} \Omega^0(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & & \uparrow \iota & & \uparrow \iota & & \uparrow \iota & \\
 & & \bigoplus_i \mathbf{R}(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0 < i_1} \mathbf{R}(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0 < i_1 < i_2} \mathbf{R}(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & 
 \end{array}$$

ここで、縦向き準同型について  $\Omega^p(U_{i_0 \dots i_k}) \rightarrow \Omega^{p+1}(U_{i_0 \dots i_k})$  は外微分  $d$  である。また、 $\bigoplus_{i_0 < \dots < i_k} \mathbf{R}(U_{i_0 \dots i_k})$  は  $\{(U_{i_0 \dots i_k})\}_{i_0 < \dots < i_k}$  を基底とする実ベクトル空間で、 $\mathbf{R}(U_{i_0 \dots i_k}) \rightarrow \Omega^0(U_{i_0 \dots i_k})$  は定数関数の埋め込み  $\iota$  である。また、横向き準同型については、 $\Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(U_i)$  は制限  $r_i$  であり、 $r = \bigoplus r_i$  と定義される。また、 $k+1$  個の添え字  $i_0 < \dots < i_k$  とそれに現れる  $i_s$  に対し、 $\Omega^p(U_{i_0 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_k}) \rightarrow \Omega^p(U_{i_0 \dots i_k})$  は制限  $r_{i_0 \dots i_k}^{i_0 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_k}$  の  $(-1)^s$  倍であり、 $\delta = \bigoplus \sum (-1)^s r_{i_0 \dots i_k}^{i_0 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_k}$  と定義される。

通常、条件 “任意の  $U_{i_0 i_1 \dots i_k}$  は  $\mathbf{R}^n$  または空集合と微分同相となる” を満たすとする。このとき、ポアンカレの補題により、縦向きの列は完全列である。

問題 1 .  $p$  を固定する。  $f^{(k)} \in \bigoplus_{i_0 < \dots < i_k} \Omega^p(U_{i_0 \dots i_k})$  に対し、  $f^{(k)}$  の  $\Omega^p(U_{i_0 \dots i_k})$  成分を

$f^{(k)}|_{U_{i_0 \dots i_k}}$  あるいは  $f_{i_0 \dots i_k}^{(k)}$  と書く。

$$(1) (\delta f^{(k)})|_{U_{i_0 \dots i_{k+1}}} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j f_{i_0 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{k+1}}^{(k)} |_{U_{i_0 \dots i_{k+1}}} \text{ を示せ。}$$

(2)  $\delta \circ \delta = 0$  を示せ。

問題 2 . 開被覆  $\{U_i\}_{i=1, \dots, N}$  に従属する 1 の分割を  $\{\lambda_i\}$  とする ( $\text{supp } \lambda_i \subset U_i$ )。  $f^{(k+1)} \in \bigoplus_{i_0 < \dots < i_{k+1}} \Omega^p(U_{i_0 \dots i_{k+1}})$  に対して、  $Sf^{(k+1)} \in \bigoplus_{i_0 < \dots < i_k} \Omega^p(U_{i_0 \dots i_k})$  を

$(Sf^{(k+1)})|_{U_{i_0 \dots i_k}} = \sum_m \lambda_m f_{m i_0 \dots i_k}^{(k+1)}$  と定義する。ただし、  $m$  が  $i_0, \dots, i_k$  のどれかと一致

するときは  $f_{m i_0 \dots i_k}^{(k+1)} = 0$  とし、  $i_{j-1} < m < i_j$  のとき、  $f_{m i_0 \dots i_k}^{(k+1)} = (-1)^j f_{i_0 \dots i_{j-1} m i_j \dots i_k}^{(k+1)}$  とする。また、  $\lambda_m f_{m i_0 \dots i_k}^{(k+1)}$  は  $\Omega^p(U_{i_0 \dots i_k})$  の元と考える。

(1)  $\delta(Sf^{(k)}) + S(\delta f^{(k)}) = f^{(k)}$  を示せ。(例えば、  $k = 2$  に対して示せ。)

(2) (1) を用いてチェック・ドラム複体の  $0 \rightarrow \Omega^p(M)$  から始まる横の列は完全列であることを示せ。

以後、条件 “任意の  $U_{i_0 i_1 \dots i_k}$  は  $\mathbb{R}^n$  または空集合と微分同相となる” を満たすとする。このとき、ポアンカレの補題により、縦向きの列は完全列である。

問題 3 . コンパクト多様体  $M$  の開被覆  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1, \dots, N}$  が、“任意の  $U_{i_0 i_1 \dots i_k}$  は  $\mathbb{R}^n$  または空集合と微分同相” という条件を満たすとき、チェック複体

$$\bigoplus_i \mathbf{R}(U_i) \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{i_0 < i_1} \mathbf{R}(U_{i_0 i_1}) \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{i_0 < i_1 < i_2} \mathbf{R}(U_{i_0 i_1 i_2}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

の  $p$  次コホモロジー  $\check{H}^p(M, \mathcal{U})$  は、  $p$  次ドラム・コホモロジーと同型であることを示せ。(  $p = 0, 1, 2, 3$  に対して示せ。 )