

復習問題 . ベクトル空間 V, W に対し双 1 次形式 $B : V \times W \rightarrow \mathbf{R}$ が定義され次を満たすとする。

$$\forall v \in V, v \neq 0 \text{ ならば } \exists w \in W, B(v, w) \neq 0$$

V は有限次元とし、基底を e_1, \dots, e_k とするとき、 $f_1, \dots, f_k \in W$ で $(B(e_i, f_j))_{i,j=1,\dots,k}$ が正則行列となるものが存在することを示せ。

問題 1 . (1) 連結多様体 M 上の微分形式 α が、任意の閉曲線 $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ ($\gamma(0) = \gamma(1)$) に対し、 $\int_{\gamma} \alpha = 0$ を満たすとする。このとき、 α は M 上の関数 f の全微分となる ($\alpha = df$) ことを示せ。

(2) 連結多様体 M 上の閉微分 1 形式 α のコホモロジー類 $[\alpha] \neq 0$ とすると、ある閉曲線 γ に対して、 $\int_{\gamma} \alpha \neq 0$ となることを示せ。

(3) コンパクト連結多様体 M の 1 次元ドラムコホモロジー群が $H_{DR}^k(M) \cong \mathbf{R}^k$ とする。閉曲線 $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ が存在して、閉微分 1 形式 α が $\int_{\gamma_i} \alpha = 0$ を満たせば、 α は M 上の関数 f の全微分となる ($\alpha = df$) ことを示せ。

定義 [標準 n 単体] $\Delta^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid 1 \geq x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0\}$

[標準 n 単体上の積分]

$$\int_{\Delta^n} f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{x_1=0}^1 (\dots (\int_{x_k=0}^{x_{k-1}} (\dots (\int_{x_n=0}^{x_{n-1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_n) \dots) dx_k) \dots) dx_1$$

問題 2 . $\int_{\Delta^n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ を求めよ。

定義 [単体からの微分可能写像 $\sigma : \Delta^n \rightarrow M$ に沿う積分]

M 上の微分 n 形式 α に対して、 σ に沿う積分を $\int_{\sigma} \alpha = \int_{\Delta^n} \sigma^* \alpha$ で定義する。

[チェイン上の積分] 写像の有限形式和 $\sum_i a_i \sigma_i$ に対して、 $\int_{\sum_i a_i \sigma_i} \alpha = \sum_i a_i \int_{\Delta^n} \sigma_i^* \alpha$ とおく。

[境界] $k = 0, \dots, n$ に対して、 $\varepsilon_k : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ を次で定義する。

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(x_1, \dots, x_{n-1}) &= (1, x_1, \dots, x_{n-1}), \\ \varepsilon_k(x_1, \dots, x_{n-1}) &= (x_1, \dots, x_k, x_k, \dots, x_{n-1}) \quad (0 < k < n), \\ \varepsilon_n(x_1, \dots, x_{n-1}) &= (x_1, \dots, x_k, \dots, x_{n-1}, 0) \end{aligned}$$

このとき、 $\partial \sigma = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma \circ \varepsilon_k$

問題3 . $\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid w \geq u \geq v \geq 0\}$ 上の関数 $f(u, v)$ の積分について次が成立する。

$$\int_{\{w \geq u \geq v \geq 0\}} f(u, v) du dv = \int_{u=0}^w \left(\int_{v=0}^u f(u, v) dv \right) du = \int_{v=0}^w \left(\int_{u=v}^w f(u, v) du \right) dv$$

これを使って、 $\alpha_k = (-1)^{k-1} f_k dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$ に対し、

$$\int_{\Delta^n} d\alpha_k = \int_{(-1)^{k-1} \varepsilon_{k-1} + (-1)^k \varepsilon_k} \alpha_k = \int_{\sum_{i=0}^n (-1)^i \varepsilon_i} \alpha_k$$

を示せ。

このことから、 $\sigma : \Delta^n \rightarrow M$, M 上の微分 $n-1$ 形式 α に対するストークスの定理

$$\int_{\sigma} d\alpha = \int_{\partial\sigma} \alpha \text{ が従う。}$$

ヒント : $F(x_1, \dots, x_{k+1}) = \int_{x_{k+2}=0}^{x_{k+1}} \cdots \int_{x_n=0}^{x_{n-1}} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_{k+2}$ について、

$$\int_{x_k=0}^{x_{k-1}} \left(\int_{x_{k+1}=0}^{x_k} F(x_1, \dots, x_{k+1}) dx_{k+1} \right) dx_k = \int_{x_{k+1}=0}^{x_{k-1}} \left(\int_{x_k=x_{k+1}}^{x_{k-1}} F(x_1, \dots, x_{k+1}) dx_k \right) dx_{k+1}$$

定義 [有限単体複体] \mathbf{R}^N の基底を $\{e_1, \dots, e_N\}$ とする。頂点 $\{e_{i_0}, \dots, e_{i_k}\}$ ($e_{i_0} < \dots < e_{i_k}$) を頂点とする k 次元単体 (これらの点の凸包) を $\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle$ で表す。すなわち、

$$\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle = \left\{ \sum_{\ell=0}^k t_{i_\ell} e_{i_\ell} \mid t_{i_\ell} \geq 0, \sum_{\ell=0}^k t_{i_\ell} = 1 \right\}$$

この単体の点 $\sum_{\ell=0}^k t_{i_\ell} e_{i_\ell}$ に対し、 $(t_{i_0}, \dots, t_{i_k})$ をその点の重心座標という。

[有限単体複体] 有限単体複体 K とはこれらの単体からなる有限集合で、一つの k 次元単体 $\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle$ をふくめば、その面となる $k-1$ 次元単体 $\langle e_{i_0} \cdots, e_{i_{\ell-1}} e_{i_{\ell+1}} \cdots, e_{i_k} \rangle$ ($0 \leq \ell \leq k$) を含む (従って、次元の低い面をすべて含む) ものである。 $|K|$ で K に属する単体の和集合を表す。 $|K|$ の点は重心座標で表されている。

問題4 . $\sigma : \Delta^k \rightarrow \langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle$ を

$$\sigma(x_1, \dots, x_k) = (1 - x_1)e_{i_0} + (x_1 - x_2)e_{i_1} + \cdots + (x_{k-1} - x_k)e_{i_{k-1}} + x_k e_{i_k}$$

で定義する。 \mathbf{R}^N 上の微分 k 形式

$$\omega_{i_0 \cdots i_k} = k! \sum_{\ell=0}^k (-1)^\ell t_{i_\ell} dt_{i_0} \wedge \cdots \wedge dt_{i_{\ell-1}} \wedge dt_{i_{\ell+1}} \wedge \cdots \wedge dt_{i_k}$$

に対し、 $\int_{\sigma} \omega_{i_0 \cdots i_k}$ を求めよ。