まず、ユークリッド空間上の微分形式の理論を見ていく。微分形式の理論は、３次元空間内のベクトル量について微分積分を考えていく中で発展してきた。

1　微積分学の基本定理

定義 1.1 (原始関数) 区間上の連続関数 $f(t)$ に対し、$F(t)$ の導関数が $f(t)$ のとき、$F(t)$ を $f(t)$ の原始関数と呼ぶ。

区間上の連続関数 $f(t)$ の２つの原始関数は定数だけ異なることに注意しておこう。これは、平均値の定理の帰結である。

定理 1.2 (定積分の存在) 閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $f(t)$ に対し、定積分 $\displaystyle\int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s$ が定まる。

定理 1.3 (微積分学の基本定理) 区間上の連続関数 $f(t)$ に対し、定積分が原始関数の１つを与える：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s = f(t)$$

言葉を換えていうと、$F(t) = \displaystyle\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s$ とおくと、$F(t)$ は微分可能であり、$F'(t) = f(t)$ となる。

これは、原始関数の存在定理である。抽象的な存在定理ではなく、定積分を定義してやると、それを積分範囲の上端についての関数と考えたものが原始関数であることを述べている。

先ほどの注意により、$f(t)$ の原始関数を $F(t)$ とすると、$\displaystyle\int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s = F(b) - F(a)$ となる。

さて、幾何学　の講義の目標の１つは、微積分学の基本定理を多様体上で定式化し証明することである。

余談であるが、なぜ微積分学の「基本定理」と呼ばれるか振り返ってみよう。

アラビアから西欧に流入した算術は、１３世紀以降、徐々に、アラビア記数法の定着（１６００年くらいまで)、筆算による四則計算の定着をもたらした。１５世紀には算術書も印刷されている。１６世紀、ルネッサンスのなかで、コペルニクス、ガリレイの運動論が現れる。算術の有用性が認識されるとともに、その計算のためにネイピアの対数が考案される。図形を代数的にとらえるために、デカルトにより座標が用いられた。

この後、半世紀ほどで、微分積分学が成立する。ニュートンは、　流量、流率という考え方を導入し、力学を記述し、惑星の運動を説明した。また、ライプニッツは、微分商、総和法など、もっといえば数学全般の記号法を整備した。微分積分学の成立において、微積分学の基本定理が認識される。また、偏微分の考察や微分方程式の考察はほぼ同じ時期に始まっている。

なぜ、微積分学の「基本定理」か？

積分の理論の原点は、面積、体積を求めることであり、これはアルキメデスにさかのぼる。アルキメデスの著作は１５世紀には数学の基礎とされていたようである。面積、体積、モーメントの計算は、カヴァリエーリ、フェルマー、パスカルにより行われている。

また、速度が時間に比例する運動については、ガリレイ、デカルト、バローが扱っている。(時間と空間の長さについては多くの混乱があったようである。)

デカルトの座標により、量は次元から独立となり、また、量の変化をグラフに表すことも普通になった。さらに、絶対時間に従って運動するというモデルを受け入れることができるようになった。運動についての速さ、曲線の接線、値の最大最小の問題の相互関係にも気が付かれていた。ケプラー、フェルマー、ホイヘンス、バロー)。

ネイピアの対数のように代数的でない関数を考える必要が生じ、$\log x$ と双曲線の切片の面積の比例関係も認識された。このような中で、サイクロイドの研究も熱心に行われた。。Cusa, Mersenne, Galileo, Torricelli, Roberval, Descartes, Fermat, Viviani, Pascal, Wallis, Lalouere, Sluze, Ricci, Huygens, Wren, Fermat, Desargues, Johann Bernoulli, Leibniz, Newton, Jacob Bernoulli, de l'Hopital. という名前が挙げられる。さらに、曲線の求長(直線化)、表面積の計算など、微分積分の複合問題も取り組まれることになった。

それでも、ニュートン、ライプニッツ以前は、面積を求めること(直方化問題というべき)と、接線を求めることは、別の問題であった。

この2つの関係を述べたものが、微積分学の基本定理である。

実際には、17世紀的な微分、積分のとらえ方には問題があり、微分が極限であることはダランベールが明確にしたといわれる。さらに、フーリエ, コーシーの後、ワイエルシュトラスにより非常に整備された形となった。の後、

微分できる関数、その微分がどのようなものか、積分できる関数がどのようなものかという議論は、超関数論、ルベーグ積分論などの数学を生んでいった。

一方、微積分学の基本定理を多変数で考えることは、力学、電磁気学、流体力学などと関連してベクトル解析として発展した。

2 微積分学の基本定理の多変数化

微積分学の基本定理 1.3 は、次のようにも書かれる。$F(t)$ を微分が連続であるような関数とする。

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,t}(s)\,\mathrm{d}s = F(b) - F(a)$$

微積分学の基本定理 1.3 は、原始関数の存在定理であるから、少し本来の趣旨からは外れていると思われるかもしれないが、$\displaystyle\int_a^t \frac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,t}(s)\,\mathrm{d}s$ が、$\dfrac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,t}$ の原始関数であることを知っているから、上の等式が導かれるのである。このことは、微分を知れば、2点における関数の値の差が計算できること、あるいは元の関数を定数を除いて復元できることを示している。

ユークリッド空間の開集合 U 上で定義された関数 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ $(\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n))$ および U の点 $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ に対して、$f(\boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{y})$ を求めるためには、どれだけの情報が必要であろうか。

$\boldsymbol{y}$ から $\boldsymbol{z}$ への U 内の曲線 $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ $(\gamma(a) = \boldsymbol{y}$, $\gamma(b) = \boldsymbol{z})$ を描くことができるときには、$f(\boldsymbol{x})$, $\gamma(t)$ が連続微分可能ならば、$f\circ\gamma$ も連続微分可能で、

$$f(\boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{y}) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}(f\circ\gamma)}{\mathrm{d}\,t}(t)\,\mathrm{d}t$$

と書かれる。$\dfrac{\mathrm{d}(f\circ\gamma)}{\mathrm{d}\,t}(t)$ は

$$\frac{\mathrm{d}(f\circ\gamma)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}\,\gamma_1}{\mathrm{d}\,t}(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}\,\gamma_n}{\mathrm{d}\,t}(t)$$

のように計算される。ここで $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ である。従って、U が弧状連結ならば、偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})$ を知れば、元の関数 f を定数を除いて復元できる。

$$f(\boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{y}) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}\,\gamma_1}{\mathrm{d}\,t}(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}\,\gamma_n}{\mathrm{d}\,t}(t) \right) \mathrm{d}t$$

この式の右辺をライプニッツ流にながめ、$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$ の $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ を $\dfrac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t, \ldots, \dfrac{\mathrm{d}\gamma_n}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t$ に置換積分のために置き換えたと考えて、この右辺を $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$ の曲線 γ 上の積分（線積分）と定義する。

$$\begin{aligned} &\int_\gamma \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \right) \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}\,\gamma_1}{\mathrm{d}\,t}(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}\,\gamma_n}{\mathrm{d}\,t}(t) \right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

このような積分は、もっと一般に定義できる。

定義 2.1 (微分１形式, 線積分) ユークリッド空間の開集合 U 上の連続関数 $f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x})$ に対して、$f_1\mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n\mathrm{d}x_n$ を、U 上の微分１形式（あるいは１次微分形式）と呼ぶ。微分１形式 $f_1\mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n\mathrm{d}x_n$ の連続微分可能曲線 $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ $(\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)))$ 上の積分（線積分）を次で定義する。

$$\int_\gamma \left(f_1\mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n\mathrm{d}x_n\right) = \int_a^b \left(f_1(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}\,\gamma_1}{\mathrm{d}\,t}(t) + \cdots + f_n(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}\,\gamma_n}{\mathrm{d}\,t}(t) \right) \mathrm{d}t$$

ここで、$\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ は、n 個の記号と考える。もともと x_1 方向, $\ldots$, x_n 方向の微小増分を抽象したものであるが、当面、n 次元実線形空間の基底を表す形式的なものと考える方が良い。ここまでだけならば、微分１形式は、U から $\boldsymbol{R}^n$ への連続写像と考えて良い。

線積分は $\gamma(t)$ のパラメータ t を単調増加 C^1 級関数 $\tau : [a_1, b_1] \longrightarrow [a, b]$ により、$\gamma(\tau(s))$ のように取り替えても変わらない。しかし、単調減少 C^1 級関数をとると、符号が変わる。

この節の初めにみたことは、微分１形式として、$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$ をとれば、線積分によって、$f(\boldsymbol{x})$ が定数を除いて復元できるということである。その意味で、$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$ は f 自体の情報をほとんど持っており、f の全微分と呼ばれ、$\mathrm{d}\,f$ と書かれる。

定義 2.2 (全微分) ユークリッド空間の開集合 U 上の連続微分可能な関数 f に対し、$\mathrm{d}\,f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$ を f の全微分と呼ぶ。

ここまでで、γ を $\boldsymbol{y}$ から $\boldsymbol{z}$ への U 内の曲線とするとき、$\displaystyle\int_\gamma \mathrm{d}\,f = f(\boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{y})$ という形の一般化が得られた。

定理 2.3 ユークリッド空間の開集合 U 上の連続微分可能な関数 f, U 内の C^1 級曲線 $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ に対し、$\displaystyle\int_\gamma \mathrm{d}\, f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ が成立する。

これは微分して積分したらほとんど元に戻ったという式である。微積分学の基本定理は、積分したものが、原始関数になるという言い方もあった。

それでは、一般の微分１形式 $f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n$ は積分できるであろうか。線積分されるものとして、微分１形式を定義したのだが、前の文の「積分できるか」というのは異なる意味である。すなわち、「線積分したものが $\boldsymbol{x}$ の関数になるか」という意味である。

U 上の連続微分可能な関数 $f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x})$ に対して、$f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ となる２回連続微分可能な関数 f が存在すれば、

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

を満たさなければいけない。そこで、この条件を満たすときに、$\mathrm{d}\, f = f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n$ となる U 上の関数は存在するであろうか。

この問への解答が、新しい数学を生むことになった。

【例 2.4】 f_1, f_2 が平面上で定義された連続微分可能な関数で、$\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}$ を満たすとする。$\mathrm{d}\, f = f_1\, \mathrm{d}x_1 + f_2\, \mathrm{d}x_2$ を満たす f は、$f(x_1, x_2) = \displaystyle\int_0^{x_1} f_1(s, 0)\, \mathrm{d}s + \int_0^{x_2} f_2(x_1, t)\, \mathrm{d}t$ で与えられる。

実際、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= f_1(x_1, 0) + \int_0^{x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, t)\, \mathrm{d}t \\
&= f_1(x_1, 0) + \int_0^{x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, t)\, \mathrm{d}t \\
&= f_1(x_1, 0) + \Big[f_1(x_1, t) \Big]_{t=0}^{t=x_2} = f_1(x_1, x_2) \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} &= f_2(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

【例 2.5】 原点を除いた平面上で定義された

$$f_1\, \mathrm{d}x_1 + f_2\, \mathrm{d}x_2 = -\frac{x_2}{{x_1}^2 + {x_2}^2}\, \mathrm{d}x_1 + \frac{x_1}{{x_1}^2 + {x_2}^2}\, \mathrm{d}x_2$$

を考えると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(-\frac{x_2}{{x_1}^2 + {x_2}^2}\Big) &= -\frac{1}{{x_1}^2 + {x_2}^2} + \frac{2{x_2}^2}{({x_1}^2 + {x_2}^2)^2} = \frac{-{x_1}^2 + {x_2}^2}{({x_1}^2 + {x_2}^2)^2} \\
\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{x_1}{{x_1}^2 + {x_2}^2}\Big) &= \frac{1}{{x_1}^2 + {x_2}^2} - \frac{2{x_1}^2}{({x_1}^2 + {x_2}^2)^2} = \frac{-{x_1}^2 + {x_2}^2}{({x_1}^2 + {x_2}^2)^2}
\end{aligned}$$

となり、$\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}$ を満たしている。

しかし、$\mathrm{d}\, f = f_1\, \mathrm{d}x_1 + f_2\, \mathrm{d}x_2$ となる $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}$ 上で定義された関数 f は存在しない。理由は以下のとおりである。$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}$ を $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ で定義する。もしも、f が存在していれば、

$$\int_\gamma f_1\, \mathrm{d}x_1 + f_2\, \mathrm{d}x_2 = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = f(1, 0) - f(1, 0) = 0$$

となるはずである。しかし、

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f_1\, \mathrm{d}x_1 + f_2\, \mathrm{d}x_2 &= \int_0^{2\pi} \left((-\sin t) \frac{\mathrm{d} \cos t}{\mathrm{d}\, t}\, \mathrm{d}t + \cos t \frac{\mathrm{d} \sin t}{\mathrm{d}\, t}\, \mathrm{d}t \right) \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi
\end{aligned}$$

となる。

例 2.5 と例 2.4 の差は原点が除かれているかどうかである。平面の開集合 U 上で定義された微分 1 形式 $f_1\,\mathrm{d}x_1+f_2\,\mathrm{d}x_2$ が $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}=\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}$ を満たすとする。例 2.4 の f は、座標軸に平行な辺を持つ長方形とその内部が U に含まれていれば、$(0,0)$ からではなく長方形の中心からの積分を考えて定義することができ、この長方形の上では、$\mathrm{d}f=f_1\,\mathrm{d}x_1+f_2\,\mathrm{d}x_2$ となることがわかる。すなわち、条件 $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}=\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}$ は、各点の近傍では、全微分の形にかかれることを意味している。例 2.5 についても、x_2 軸を除けば、$f(x_1,x_2)=\tan^{-1}(\dfrac{x_2}{x_1})$ の全微分となっているし、x_1 軸を除けば、$f(x_1,x_2)=\dfrac{1}{\tan^{-1}(\dfrac{x_1}{x_2})}$ の全微分になっている。

注意 2.6　これは、2 次元のなかで初めて問題になるのではなく、円周上の関数を与えて、それが微分になるような関数を求める時の問題と同等である。

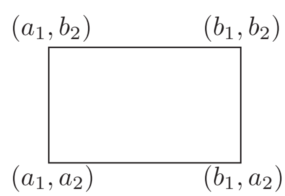
定義 2.7 n 次元ユークリッド空間の開集合 U が次の性質を持つ U 内の点 $\boldsymbol{y}$ を持つとき、U は（$\boldsymbol{y}$ に対し）星型であるという。任意の $\boldsymbol{x}\in U$ に対し、線分 $\ell_{\boldsymbol{x}}=\{(1-t)\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{x}\ \big|\ 0\leqq t\leqq 1\}$ は U に含まれる。

【問題 2.8】　n 次元ユークリッド空間の開集合 U は $\boldsymbol{y}\in U$ に対し星型とする。U 上の連続関数 $f_1,\ldots,f_n$ が、$i,j=1,\ldots,n$ に対し、条件 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ を満たしているとする。$f(\boldsymbol{x})=\displaystyle\int_{\ell_{\boldsymbol{x}}}f_1\,\mathrm{d}x_1+\cdots+f_n\,\mathrm{d}x_n$ とおく。$\mathrm{d}f=f_1\,\mathrm{d}x_1+\cdots+f_n\,\mathrm{d}x_n$ を示せ。

【問題 2.8 の解答】 $\displaystyle\int_{\ell_{\boldsymbol{x}}}f_1\,\mathrm{d}x_1+\cdots+f_n\,\mathrm{d}x_n=\int_0^1\sum_{i=1}^n f_i((1-t)\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{x})(x_i-y_i)\,\mathrm{d}t$ であるから、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}&=\frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^1\sum_{j=1}^n f_j((1-t)\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{x})(x_j-y_j)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_j}{\partial x_i}_{((1-t)\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{x})}t(x_j-y_j)\,\mathrm{d}t+\int_0^1 f_i((1-t)\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_j}_{((1-t)\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{x})}(x_j-y_j)t\,\mathrm{d}t+\int_0^1 f_i((1-t)\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\\&=\Big[f_i((1-t)\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{x})t\Big]_0^1-\int_0^1 f_i((1-t)\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t+\int_0^1 f_i((1-t)\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\\&=f_i(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

さて、平面の開集合 U 上で $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}=\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}$ が成り立たない場合は, $\mathrm{d}f=f_1\,\mathrm{d}x_1+f_2\,\mathrm{d}x_2$ のようにはならない。その理由は、線積分の値が曲線のとり方によってしまうところにある。



その典型的な例は、U に含まれるある長方形 $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ の境界上で
$\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}f_1(x_1,a_2)\,\mathrm{d}x_1+\int_{a_2}^{b_2}f_2(b_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2$
と $\displaystyle\int_{a_2}^{b_2}f_2(a_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2+\int_{a_1}^{b_1}f_1(x_1,b_2)\,\mathrm{d}x_1$ の値が異なっている場合である。

このとき、2つの値の差は次のように計算される。

$$
\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1,a_2)\,\mathrm{d}x_1 + \int_{a_2}^{b_2} f_2(b_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2 \\
&\qquad - \int_{a_2}^{b_2} f_2(a_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2 - \int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1,b_2)\,\mathrm{d}x_1 \\
&= \int_{a_2}^{b_2} \big(f_2(b_1,x_2) - f_2(a_1,x_2)\big)\,\mathrm{d}x_2 - \int_{a_1}^{b_1} \big(f_1(x_1,b_2) - f_1(x_1,a_2)\big)\,\mathrm{d}x_1 \\
&= \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 - \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 \\
&= \int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2
\end{aligned}
$$

この式を見ると、もしも U 内に $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}$ が 0 とならない点があれば、連続性からその点の近傍で 0 ではなく、その近傍内にとった長方形上で、上の積分が 0 とならない。従って、$\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}$ は、微分1形式 $f_1\,\mathrm{d}x_1 + f_2\,\mathrm{d}x_2$ が全微分 $\mathrm{d}\,f$ の形に書かれない度合いを表現しているが、面上で積分することにより数値を与えるような量である。

$\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}$ はそれぞれ、f_1, f_2 の全微分 $\mathrm{d}f_1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}f_2 = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2$ に現れてくるのであるが、微分1形式 $f_1\,\mathrm{d}x_1 + f_2\,\mathrm{d}x_2$ から考えると、$f_1\,\mathrm{d}x_1$ からは、x_2 についての偏微分、$f_2\,\mathrm{d}x_2$ からは、x_1 についての偏微分をとっている。さらに一方は符号が変わっている。この状況を次のように考える。まず、同じものを打ち消し、順序を変えると符号が変わる積 $\wedge$ を導入して、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}x_1 &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2\right) \wedge \mathrm{d}x_1 \\
\mathrm{d}f_2 \wedge \mathrm{d}x_2 &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2\right) \wedge \mathrm{d}x_2
\end{aligned}
$$

を考える。$\wedge$ は外積 (exterior product) と呼ばれる。外積 $\wedge$ の計算規則が

$$
\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_1 = 0,\ \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_2 = 0,\ \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 = -\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2
$$

であるとすると、

$$
\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}f_2 \wedge \mathrm{d}x_2 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2
$$

を得る。この左辺を、$\mathrm{d}(f_1\,\mathrm{d}x_1 + f_2\,\mathrm{d}x_2)$ と書くことにすると、

$$
\mathrm{d}(f_1\,\mathrm{d}x_1 + f_2\,\mathrm{d}x_2) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2
$$

これは、d は、ライプニッツルールを満たす「微分」であると考え、さらに $\mathrm{d}(\mathrm{d}x_1) = 0$, $\mathrm{d}(\mathrm{d}x_2) = 0$ として計算したものに等しい。これは、C^2 級関数 f に対して $\mathrm{d}(\mathrm{d}\,f) = 0$ となることと符合している。実際、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\,f) &= \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = 0
\end{aligned}
$$

となる。

さて、$1 \leqq i < j \leqq n$ に対し、$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個の記号 $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ を準備し、n 次元ユークリッド空間の開集合 U 上の微分2形式（2次（外）微分形式）を次のようなものとして定義する。

定義 2.9 (微分２形式) n 次元ユークリッド空間の開集合 U 上の連続関数 $f_{ij}(\boldsymbol{x})$ $(1 \leqq i < j \leqq n)$ に対して、$\displaystyle\sum_{1 \leqq i<j \leqq n} f_{ij}\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ を、U 上の微分２形式と呼ぶ。

また、U 上の微分１形式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i\,\mathrm{d}x_i, \sum_{j=1}^{n} g_j\,\mathrm{d}x_j$ の外積を次のように定義する。

定義 2.10 (微分１形式の外積)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\,\mathrm{d}x_i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} g_j\,\mathrm{d}x_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} f_i g_j\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$$

ただし、$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0,\ \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i,$ とする。

微分１形式の外積で得られた微分２形式を微分２形式の定義 2.9 の形で書けば、$\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\,\mathrm{d}x_i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} g_j\,\mathrm{d}x_j\right) = \sum_{1 \leqq i<j \leqq n} (f_i g_j - f_j g_i)\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ となる。しかし、$j \leqq i$ についての $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ を使った無駄のある書き方も必要に応じて許すことにする。

さらに、微分１形式の外微分を次で定義する。

定義 2.11 (微分１形式の外微分) $\displaystyle\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\,\mathrm{d}x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}f_i \wedge \mathrm{d}x_i.$ ここで、$\mathrm{d}f_i$ は f_i の全微分である。

外微分を定義 2.9 の形で書けば、

$$\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\,\mathrm{d}x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i = \sum_{j<i} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$$

となる。

微分１形式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i\,\mathrm{d}x_i$ は、$\displaystyle\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\,\mathrm{d}x_i\right) = 0$ のとき、閉形式と呼ばれる。問題 2.8 により、n 次元ユークリッド空間の開集合 U 上の閉微分１形式 $f_1\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n\,\mathrm{d}x_n$ は、U が星形ならば、U 上の関数の全微分となることがわかった。これが、微積分学の基本定理の多変数への拡張である。

【問題 2.12】 n 次元ユークリッド空間の開集合 U 上の２回連続微分可能関数 f の全微分 $\mathrm{d}f$ は閉形式であることを示せ。

【問題 2.12 の解答】

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}\,f) &= \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\frac{\partial f}{\partial x_i} \wedge \mathrm{d}x_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \\ &= \sum_{1 \leqq j<i \leqq n}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i = 0\end{aligned}$$

3　面積分

平面の開集合上の微分１形式 $f_1\,\mathrm{d}x_1 + f_2\,\mathrm{d}x_2$ の外微分として得られる微分２形式 $\displaystyle\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ は、長方形上で「積分する」と、長方形の境界を内部を左に見るように回った線積分を与える。線積分は、逆向きに回ると符号が変わることに注意しよう。

線積分を定義したように一般の n 次元ユークリッド空間の開集合 U 上の微分２形式を長方形 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ からの C^1 級写像 $\kappa : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \longrightarrow U$ に沿って積分することができる。

すなわち、$\kappa(t_1, t_2) = (\kappa_1(t_1, t_2), \ldots, \kappa_n(t_1, t_2))$ に対して、

$$\int_\kappa \sum_{i<j} f_{ij} \, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \sum_{i<j} f_{ij}(\kappa(t_1, t_2)) \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \kappa_i}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \kappa_i}{\partial t_2} \\ \dfrac{\partial \kappa_j}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \kappa_j}{\partial t_2} \end{pmatrix} \mathrm{d}t_1 \, \mathrm{d}t_2$$

とおく。

この定義によれば、平面の開集合 U に含まれる長方形上の積分の場合でも、長方形を $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ というパラメータのまま、恒等写像 κ_0 について積分する場合と、$\kappa_1(t_1, t_2) = (b_1 + a_1 - t_1, t_2)$ という写像に沿って積分する場合とでは、行列式が -1 倍となるので、得られた積分の符号が異なる。

無駄を含んだ U 上の微分２形式 $\displaystyle\sum_{i,j=1}^n g_{ij} \, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ に対し、上と全く同じ式で、

$$\int_\kappa \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\kappa(t_1, t_2)) \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \kappa_i}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \kappa_i}{\partial t_2} \\ \dfrac{\partial \kappa_j}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \kappa_j}{\partial t_2} \end{pmatrix} \mathrm{d}t_1 \, \mathrm{d}t_2$$

とおく。$\beta = \displaystyle\sum_{i,j=1}^n g_{ij} \, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ を $i < j$ に対し、$f_{ij} = g_{ij} - g_{ji}$ として、整理したものを $\alpha = \displaystyle\sum_{i<j}^n f_{ij} \, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ とするとき、$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \kappa_i}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \kappa_i}{\partial t_2} \\ \dfrac{\partial \kappa_j}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \kappa_j}{\partial t_2} \end{pmatrix}$ の値を考えると $\displaystyle\int_\kappa \beta = \int_\kappa \alpha$ であることがわかる。このことが、微分形式の取り扱いを容易にしている。

【問題 3.1】 n 次元ユークリッド空間の開集合 U 上の微分１形式 $\displaystyle\sum_{i=1}^n f_i \, \mathrm{d}x_i$ の外微分 $\mathrm{d}\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^n f_i \, \mathrm{d}x_i\Big)$ に対し、長方形 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ から U への C^1 級写像 $\kappa : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \longrightarrow U$ に沿う積分が以下のような線積分の和となることを示せ。

$$\begin{aligned} &\int_\kappa \mathrm{d}\Big(\sum_{i=1}^n f_i \, \mathrm{d}x_i\Big) \\ &= -\int_{\kappa(\cdot, b_2)} \sum_{i=1}^n f_i \, \mathrm{d}x_i + \int_{\kappa(\cdot, a_2)} \sum_{i=1}^n f_i \, \mathrm{d}x_i \\ &\qquad + \int_{\kappa(b_1, \cdot)} \sum_{i=1}^n f_i \, \mathrm{d}x_i - \int_{\kappa(a_1, \cdot)} \sum_{i=1}^n f_i \, \mathrm{d}x_i \end{aligned}$$

【問題 3.1 の解答】 次のように計算される。２番目の等号では $i = j$ のときに行列式

が 0 になっていることを使う。5番目の等号は、t_2, t_1 について積分している。

$$
\begin{aligned}
&\int_\kappa \mathrm{d}\Bigl(\sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}x_i\Bigr)\\
&=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\sum_{i<j}\Bigl(-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}+\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Bigr)\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\kappa_i}{\partial t_1} & \dfrac{\partial\kappa_i}{\partial t_2}\\ \dfrac{\partial\kappa_j}{\partial t_1} & \dfrac{\partial\kappa_j}{\partial t_2}\end{pmatrix}\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\\
&=-\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\kappa_i}{\partial t_1} & \dfrac{\partial\kappa_i}{\partial t_2}\\ \dfrac{\partial\kappa_j}{\partial t_1} & \dfrac{\partial\kappa_j}{\partial t_2}\end{pmatrix}\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\\
&=-\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\sum_{i,j=1}^n\Bigl(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial\kappa_j}{\partial t_2}\frac{\partial\kappa_i}{\partial t_1}-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial\kappa_j}{\partial t_1}\frac{\partial\kappa_i}{\partial t_2}\Bigr)\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\\
&=-\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\Bigl(\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_i(\kappa(t_1,t_2))}{\partial t_2}\frac{\partial\kappa_i}{\partial t_1}-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_i(\kappa(t_1,t_2))}{\partial t_1}\frac{\partial\kappa_i}{\partial t_2}\Bigr)\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\\
&=-\int_{[a_1,b_1]}\Bigl[\sum_{i=1}^n f_i(\kappa(t_1,t_2))\Bigr]_{t_2=a_2}^{t_2=b_2}\frac{\partial\kappa_i}{\partial t_1}\,\mathrm{d}t_1\\
&\qquad+\int_{[a_2,b_2]}\Bigl[\sum_{i=1}^n f_i(\kappa(t_1,t_2))\Bigr]_{t_1=a_1}^{t_1=b_1}\frac{\partial\kappa_i}{\partial t_2}\,\mathrm{d}t_2\\
&=-\int_{[a_1,b_1]}\sum_{i=1}^n\Bigl(f_i(\kappa(t_1,b_2))-f_i(\kappa(t_1,a_2))\Bigr)\frac{\partial\kappa_i}{\partial t_1}\,\mathrm{d}t_1\\
&\qquad+\int_{[a_2,b_2]}\sum_{i=1}^n\Bigl(f_i(\kappa(b_1,t_2))-f_i(a_1,t_2)\Bigr)\frac{\partial\kappa_i}{\partial t_2}\,\mathrm{d}t_2\\
&=-\int_{\kappa(\cdot,b_2)}\sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}x_i+\int_{\kappa(\cdot,a_2)}\sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}x_i\\
&\qquad+\int_{\kappa(b_1,\cdot)}\sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}x_i-\int_{\kappa(a_1,\cdot)}\sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}x_i
\end{aligned}
$$

問題 3.1 をみると、微分１形式の外微分の長方形からの写像に沿う面積分は、長方形の境界からの写像に沿う線積分となることがわかる。

さらに次元を上げて、３次元ユークリッド空間の直方体 $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ 上の微分２形式 $f_{12}(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$ を考える。この微分２形式の直方体の面 $\{x_1\}\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ $(x_1=a_1,\,b_1)$, $[a_1,b_1]\times\{x_2\}\times[a_3,b_3]$ $(x_2=a_2,\,b_2)$ についての面積分は 0 である。また、$[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\{x_3\}$ $(x_3=a_3,\,b_3)$ について

$$
\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}(f_{12}(x_1,x_2,b_3)-f_{12}(x_1,x_2,a_3))\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_3}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3
\end{aligned}
$$

となる。

この現象は、第２節で長方形と微分１形式について考えた状況に似ている。このことが、一般の微分形式の存在、その積分の理論の存在を意味している。

4　一般の微分形式

n 次元ユークリッド空間の開集合 U 上で $1\leqq p\leqq n$ に対して微分 p 形式を定義するために、$1\leqq i_1<\cdots<i_p\leqq n$ となる自然数 $i_1,\,\ldots,\,i_p$ に対応した $\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ という全部で $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ 個の記号を用意する。

定義 4.1 (微分 p 形式) n 次元ユークリッド空間の開集合 U 上の連続関数 $f_{i_1\ldots i_p}(\boldsymbol{x})$ $(1\leqq i_1<\cdots<i_p\leqq n)$ に対して、$\displaystyle\sum_{1\leqq i_1<\cdots<i_p\leqq n} f_{i_1\ldots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ を、U 上の微分 p 形式と呼ぶ。

U 上の微分 p 形式 $\displaystyle\sum_{1\leqq i_1<\cdots<i_p\leqq n} f_{i_1\ldots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ と微分 q 形式 $\displaystyle\sum_{1\leqq j_1<\cdots<j_q\leqq n} g_{j_1\ldots j_q}\,\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}$ の外積を次のように定義する。

定義 4.2 (微分 p 形式と微分 q 形式の外積)

$$\left(\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\ldots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\right)\wedge\left(\sum_{j_1<\cdots<j_q} g_{j_1\ldots j_q}\,\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\right)$$
$$=\sum_{i_1<\cdots<i_p,\ j_1<\cdots<j_q} f_{i_1\ldots i_p}g_{j_1\ldots j_q}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}$$

ここで、$i_1,\ \ldots,\ i_p,\ j_1,\ \ldots,\ j_q$ のなかに同じものがあれば

$$\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}=0$$

とし、これらがすべて異なり、これを並べ替えたものを $k_1,\ \ldots,\ k_{p+q}$ $(k_1<\cdots<k_{p+q})$ とするとき、$\mathrm{sign}\begin{pmatrix} i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q \\ k_1\cdots\cdots k_{p+q}\end{pmatrix}$ を置換の符号として、

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\\ &=\mathrm{sign}\begin{pmatrix} i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q \\ k_1\cdots\cdots k_{p+q}\end{pmatrix}\mathrm{d}x_{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{k_{p+q}}\end{aligned}$$

とする。

この外積の並べ替えは、$\mathrm{d}x_i$ の間にある積 $\wedge$ が、結合法則を満たし、反可換性を満たすと考え、$\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_i=0,\ \mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j=-\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i$ という規則で並べ替えたものとなっている。無駄のある書き方も必要に応じて許すことにするのは前と同様である。

【例 4.3】 $2n$ 次元ユークリッド空間上の微分 2 形式 $\omega=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_{2i-1}\wedge\mathrm{d}x_{2i}$ に対し、ω を n 回外積したものは、$\omega\wedge\cdots\wedge\omega=n!\,\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{2n}$ となる。微分 2 形式 ω は $2n$ 次元ユークリッド空間の標準的シンプレクティク形式と呼ばれる。

【問題 4.4】 U 上の微分 p 形式 α と微分 q 形式 β に対し、$\beta\wedge\alpha=(-1)^{pq}\alpha\wedge\beta$ を示せ。

【解】 定義 4.2 のように微分 p 形式 α、微分 q 形式 β が与えられているとき、$\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ と $\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}$ の関係を調べればよいが、同じ添え字が出てこないときには、ちょうど pq 回隣と入れ替えることにより一方から他方が得られる。従って $(-1)^{pq}$ 倍となる。

微分 p 形式の外微分を次で定義する。

定義 4.5 (微分 p 形式の外微分)

$$\mathrm{d}\left(\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\ldots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\right)=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\mathrm{d}f_{i_1\ldots i_p}\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}.$$

ここで、$\mathrm{d}f_i$ は f_i の全微分である。

【例 4.6】 $2n+1$ 次元ユークリッド空間上の微分 1 形式 $\alpha=x_{2n+1}+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_{2i-1}\,\mathrm{d}x_{2i}$ に対し、$\mathrm{d}\,\alpha=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_{2i-1}\wedge\mathrm{d}x_{2i}$. α と n 個の $\mathrm{d}\,\alpha$ の外積 $\alpha\wedge\mathrm{d}\,\alpha\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,\alpha=$

$n!\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{2n+1}$ となる。α は $2n+1$ 次元ユークリッド空間の標準的接触形式と呼ばれる。

【問題 4.7】 U 上の微分 p 形式 α と微分 q 形式 β に対し、$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$ を示せ。

【解】 定義 4.2 のように微分 p 形式 α、微分 q 形式 β が与えられているとき、その外積 $\alpha \wedge \beta$ の外微分は全微分 $\mathrm{d}(f_{i_1 \dots i_p} g_{j_1 \dots j_q})$ と $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q}$ の外積の和となる。

$$\mathrm{d}(f_{i_1 \dots i_p} g_{j_1 \dots j_q}) = f_{i_1 \dots i_p}\, \mathrm{d}g_{j_1 \dots j_q} + g_{j_1 \dots j_q}\, \mathrm{d}f_{i_1 \dots i_p}$$

である。ここで、和の第 2 項は、そのまま $\mathrm{d}\alpha \wedge \beta$ の項としてあらわれる。一方、和の第 1 項は、$\alpha \wedge \mathrm{d}\beta$ と比較すると、全微分 $\mathrm{d}g_{j_1 \dots j_q}$ の位置が最初に来ているだけことなる。従って $(-1)^p \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$ の項と一致する。

さて、U 上の微分 p 形式は p 次元直方体からの写像に沿って積分される。

定義 4.8 (微分 p 形式の積分) $\kappa : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p] \longrightarrow U$ に対し、

$$\int_\kappa \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \dots i_p}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_p}^{b_p} \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \dots i_p}(\kappa(t_1, \dots, t_p)) \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_p} \end{pmatrix} \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_p$$

微分 p 形式を表す上での外積の記号について、自然数 $j_1, \dots, j_p$ $(1 \leqq j_1 \leqq n, \dots, 1 \leqq j_p \leqq n)$ のなかに同じものがあるときには

$$\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_p} = 0$$

とし、$j_1, \dots, j_p$ が $i_1, \dots, i_p$ $(i_1 < \cdots < i_p)$ を並べ替えたもののときには、$\mathrm{sign} \begin{pmatrix} j_1 \cdots j_p \\ i_1 \cdots i_p \end{pmatrix}$ を置換の符号として、

$$\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_p} = \mathrm{sign} \begin{pmatrix} j_1 \cdots j_p \\ i_1 \cdots i_p \end{pmatrix} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

と定義する。3 節で面積分のときに議論したように、この記号を使って書かれた微分 p 形式の積分を、定義 4.8 の式と全く同じ形で

$$\int_\kappa \sum_{i_1, \cdots, i_p = 1}^{n} f_{i_1 \dots i_p}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_p}^{b_p} \sum_{i_1, \cdots, i_p = 1}^{n} f_{i_1 \dots i_p}(\kappa(t_1, \dots, t_p)) \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_p} \end{pmatrix} \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_p$$

と定義することができる。

次の問題は、このような積分の定義が自然なものであることを示している。

【問題 4.9】 n 次元ユークリッド空間の開集合 U 上の微分 p 形式 $\alpha = \displaystyle\sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \cdots i_p}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$ の外微分 $\mathrm{d}\alpha$ に対し、$p+1$ 次元直方体 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{p+1}, b_{p+1}]$

から U への C^1 級写像 $\kappa : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{p+1}, b_{p+1}] \longrightarrow U$ に沿う積分が以下のような p 次元直方体から U への写像に沿う積分の和となることを示せ。

$$\int_\kappa \mathrm{d}\alpha = \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{q-1} \left(\int_{\kappa(\cdots, b_q, \cdots)} \alpha - \int_{\kappa(\cdots, a_q, \cdots)} \alpha \right)$$

【問題 4.9 の解答】 $\mathrm{d}\alpha$ の項 $\mathrm{d}f_{i_1 \cdots i_p} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$ $(i_1 < \cdots < i_p)$ に対し、

$$\begin{aligned}
&\int_\kappa \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \\
&= \int_{[a_1,b_1] \times \cdots \times [a_{p+1},b_{p+1}]} \sum_{j=1}^{n} \\
&\qquad \frac{\partial f_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x_j}(\kappa(t_1, \ldots, t_{p+1})) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \kappa_j}{\partial t_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \kappa_j}{\partial t_{p+1}} \\ \frac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_{p+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_{p+1}} \end{pmatrix} \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{p+1} \\
&= \int_{[a_1,b_1] \times \cdots \times [a_{p+1},b_{p+1}]} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x_j}(\kappa(t_1, \ldots, t_{p+1})) \\
&\qquad \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{q-1} \frac{\partial \kappa_j}{\partial t_q} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_{q-1}} & \frac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_{p+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_{q-1}} & \frac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_{p+1}} \end{pmatrix} \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{p+1} \\
&= \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{q-1} \int_{[a_1,b_1] \times \cdots \times [a_{q-1},b_{q-1}] \times [a_{q+1},b_{q+1}] \times \cdots \times [a_{p+1},b_{p+1}]} \\
&\qquad \Big[f_{i_1 \ldots i_p}(\kappa(t_1, \ldots, t_{q-1}, t_q, t_{q+1}, \ldots, t_{p+1})) \Big]_{t_q = a_q}^{t_q = b_q} \\
&\qquad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_{q-1}} & \frac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_{p+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_{q-1}} & \frac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_{p+1}} \end{pmatrix} \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{q-1} \, \mathrm{d}t_{q+1} \cdots \mathrm{d}t_{p+1} \\
&= \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{q-1} \left(\int_{\kappa(\cdots, b_q, \cdots)} \alpha - \int_{\kappa(\cdots, a_i, \cdots)} \alpha \right)
\end{aligned}$$

ユークリッド空間の開集合 U 上の微分 0 形式は U 上の関数全体と定義する。以後、関数としては、C^∞ 級関数を、微分形式の係数としてあらわれる関数も C^∞ 級関数を考える。こうして、ユークリッド空間の開集合 U 上の微分 p 形式全体を $\Omega^p(U)$ と書くことにする。$p < 0$, $p > n$ に対しては $\Omega^p(U) = \{0\}$ と考える。外微分 d は $\mathrm{d} : \Omega^p(U) \longrightarrow \Omega^{p+1}(U)$ という作用素である（$p = 0$ については、全微分を考える）。

ここで、

$$0 \longrightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(U) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2(U) \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^n(U) \longrightarrow 0$$

という列を考える。関数の全微分 $\mathrm{d}f$ に対して $\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$ を示したが、一般に $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} : \Omega^p(U) \longrightarrow \Omega^{p+2}(U)$ は 0 準同型であることがいえる。

定理 4.10 ユークリッド空間の開集合 U 上の微分 p 形式全体を $\Omega^p(U)$ と書くとき、$\mathrm{d}\circ\mathrm{d} : \Omega^p(U) \longrightarrow \Omega^{p+2}(U)$ は 0 準同型である。

証明 基底 $\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ に対して、外微分は 0 であること、例題 4.7、および問題 2.12 からわかる。実際、定義 4.5 のような微分 p 形式の各項に対し

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\left(\mathrm{d}\left(f_{i_1\dots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\right)\right)=\mathrm{d}\left(\mathrm{d}f_{i_1\dots i_p}\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\right)\\&=\mathrm{d}\left(\mathrm{d}f_{i_1\dots i_p}\right)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}+\mathrm{d}f_{i_1\dots i_p}\wedge\mathrm{d}\left(\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\right)=0\end{aligned}$$

■

次の命題をポアンカレの補題と呼ぶ。

定理 4.11 (ポアンカレの補題) ユークリッド空間の開集合 U に対し、U 内の点 $\boldsymbol{y}$ で、任意の $\boldsymbol{x}\in U$ に対し、線分 $\ell_{\boldsymbol{x}}=\{(1-t)\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{x} \mid 0\leqq t\leqq 1\}$ が U に含まれるものがあると仮定する。U 上の微分 p 形式 α が $\mathrm{d}\,\alpha=0$ を満たすならば、$\mathrm{d}\,\beta=\alpha$ となる微分 $p-1$ 形式 β が存在する。

この定理は、問題 2.8 と同様の命題が、任意の正の次数 p に対し、微分 p 形式に対して成立することを述べている非常に重要な結果である。

ポアンカレの補題の証明は後に述べるが、ポアンカレの補題を見通し良く示すには、微分形式の引き戻し (pull-back) を考えるのが良い。引き戻しは、微分形式の積分と整合するように考え出された。

5 微分形式の引き戻し

m 次元ユークリッド空間の開集合 V から n 次元ユークリッド空間の開集合 W への C^∞ 級写像 $\varphi : V \longrightarrow W$ が与えられているとする。$\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$, あるいは成分について $y_i=\varphi_i(x_1,\dots,x_m)$, $(i=1,\,\dots,\,n)$ のように与える。W 上の C^1 級関数 f に対して、$f\circ\varphi$ は V 上の C^1 級関数である。これらについて、全微分の線積分は、関数の差となるという定理 2.3 を書いてみると次のようになる。C^1 級曲線 $\gamma : [a,b] \longrightarrow V$ に対し、$\varphi\circ\gamma : [a,b] \longrightarrow W$ は W 内の C^1 級曲線であり、

$$\int_\gamma \mathrm{d}(f\circ\varphi)=f(\varphi(\gamma(b)))-f(\varphi(\gamma(a)))=\int_{\varphi\circ\gamma}\mathrm{d}f$$

全微分を成分で書くと、

$$\int_\gamma\sum_{j=1}^m\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j=\int_{\varphi\circ\gamma}\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial y_i}\,\mathrm{d}y_i$$

である。この左辺は、V 内の曲線上の線積分、右辺は W 内の曲線上の線積分である。$\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial x_j}=\displaystyle\sum_{i=1}^m\frac{\partial f}{\partial y_i}\circ\varphi\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$ であるから、W 上の関数 f, $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}$ に対し、V 上の関数 $f\circ\varphi$, $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}\circ\varphi$ を対応させる対応を、全微分に対して、$\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial y_i}\,\mathrm{d}y_i$ に $\displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\frac{\partial f}{\partial x_i}\circ\varphi\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j$ を対応させる対応に拡張すれば、曲線 γ 上の線積分と曲線 $\varphi\circ\gamma$ 上の線積分が同じ値になる。この対応は、微分 1 形式に対して、拡張される。

定義 5.1 (微分１形式の引き戻し) m 次元ユークリッド空間の開集合 V から n 次元ユークリッド空間の開集合 W への C^∞ 級写像 $\varphi : V \longrightarrow W$ と W 上

の微分１形式 $\displaystyle\sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}y_i$ に対し、$\displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m f_i\circ\varphi\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j$ を $\displaystyle\sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}y_i$ の φ による引き戻しと呼び、$\displaystyle\varphi^*\biggl(\sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}y_i\biggr)$ と書く。

W 上の関数 f の引き戻しを $\varphi^* f = f\circ\varphi$ と定義すると、上に述べたことにより次の命題が成立している。

命題 5.2 $\mathrm{d}(\varphi^* f) = \varphi^*\,\mathrm{d}f$

さらに、形の上で、

$$\varphi^*\biggl(\sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}y_i\biggr) = \sum_{i=1}^n(\varphi^* f_i)(\varphi^*\,\mathrm{d}y_i) = \sum_{i=1}^n \varphi^* f_i\,\mathrm{d}\varphi_i$$

となっている。

微分１形式 $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}y_i$ についても、全微分に対して成立していた式 $\displaystyle\int_\gamma \varphi^*\alpha = \int_{\varphi\circ\gamma}\alpha$ が成立している。実際、

$$\begin{aligned}\int_\gamma \varphi^*\alpha &= \int_\gamma \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m f_i\circ\varphi\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m f_i\circ\varphi\circ\gamma\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\circ\gamma\ \frac{\mathrm{d}\,\gamma_j}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i\circ\varphi\circ\gamma\ \frac{\mathrm{d}(\varphi_i\circ\gamma)}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi\circ\gamma}\alpha\end{aligned}$$

さらに、微分 p 形式の引き戻しを次のように定義する。

定義 5.3 (微分 p 形式の引き戻し) m 次元ユークリッド空間の開集合 V から n 次元ユークリッド空間の開集合 W への C^∞ 級写像 $\varphi : V \longrightarrow W$ と W 上の微分 p 形式 $\alpha = \displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}y_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_{i_p}$ に対し、

$$\varphi^*\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}\circ\varphi\,\mathrm{d}\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_p}$$

を α の φ による引き戻しとよぶ。ただし、$\mathrm{d}\varphi_{i_j} = \displaystyle\sum_{k=1}^m \frac{\partial\varphi_{i_j}}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x_k$ （全微分）である。

【例 5.4】 (0) V, W が $\boldsymbol{R}^n$ の開集合で $V\subset W$ であるとき、包含写像 $\iota : V \longrightarrow W$ について、W 上の微分 p 形式 α の引き戻しは $\iota^*\alpha$ は α の V への制限と呼ばれ、$\alpha|V$ のようにも書かれる。

(1) $m<n$ に対して、$\iota : \boldsymbol{R}^m \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ を

$$\iota(x_1,\ldots,x_m) = (x_1,\ldots,x_m,0\ldots,0)$$

で定義する。$\boldsymbol{R}^n$ 上の微分 p 形式 $\alpha = \displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ に対し、$\iota^*\alpha = \displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_p\leqq m} f_{i_1\cdots i_p}\circ\iota\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ となる。$\boldsymbol{R}^m\subset\boldsymbol{R}^n$ と見るとき $\iota^*\alpha$ も α の $\boldsymbol{R}^m$ への制限と呼ばれる。

(2) $m < n$ に対して、$\pi : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ を $\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$ で定義する。$\boldsymbol{R}^m$ 上の微分 p 形式 $\alpha = \displaystyle\sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \cdots i_p} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$ に対し、$\pi^*\alpha = \displaystyle\sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \cdots i_p} \circ \pi \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$ となる。$\pi^*\alpha$ は $x_{m+1}, \ldots, x_n$ の方向には値が一定である。

【問題 5.5】 n 次元ユークリッド空間上の微分 n 形式 $\Omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ を考える。線形写像 $L : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ が $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,n; j=1,\ldots,n}$ により $L(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = (\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j)_{j=1,\ldots,n}$ で与えられているとする。$L^*\Omega$ を求めよ。

【問題 5.6 の解答】

$$
\begin{aligned}
L^*\Omega &= \mathrm{d}\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} x_{j_1} \right) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\left(\sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} x_{j_n} \right) \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \, \mathrm{d}x_{j_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} \, \mathrm{d}x_{j_n} \right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \, \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_n}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_n}$ は $j_1, \ldots, j_n$ が $1, \ldots, n$ の置換 $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ であるときに限り 0 ではなく、$\mathrm{sign}(\sigma) \, \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ に等しいから、

$$
L^*\Omega = \sum_{\sigma} \mathrm{sign}\, \sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \, \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n = \det(A) \, \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n
$$

【問題 5.6】 4 次元ユークリッド空間上の微分 2 形式 $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$ を考える。線形写像 $L : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^4$ が行列 $(a_{ij})_{i=1,\ldots,4; j=1,2}$ により $L(u_1, u_2) = (\displaystyle\sum_{j=1,2} a_{ij} u_j)_{i=1,\ldots,4}$ で与えられているとする。$L^*\omega = 0$ となる条件を求めよ。

【問題 5.6 の解答】

$$
\begin{aligned}
L^*\omega &= (a_{11} \, \mathrm{d}u_1 + a_{12} \, \mathrm{d}u_2) \wedge (a_{21} \, \mathrm{d}u_1 + a_{22} \, \mathrm{d}u_2) \\
&\qquad + (a_{31} \, \mathrm{d}u_1 + a_{32} \, \mathrm{d}u_2) \wedge (a_{41} \, \mathrm{d}u_1 + a_{42} \, \mathrm{d}u_2) \\
&= \left(\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \right) \mathrm{d}u_1 \wedge \mathrm{d}u_2
\end{aligned}
$$

従って、条件は $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} = 0$ である。

【問題 5.7】 $\boldsymbol{R}^3$ の座標を (x, y, z) とし、$\boldsymbol{R}^3$ 上の微分 1 形式 $\alpha = \mathrm{d}z + x \, \mathrm{d}y$ を考える。

(1) 写像 $F : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を $F(x, y, z) = (x, y, z - \dfrac{xy}{2})$ で定義するとき、$F^*\alpha$ を計算せよ。

(2) F のヤコビ行列式を計算せよ。

$\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha$, $F^*\alpha \wedge \mathrm{d}F^*\alpha$ を計算せよ。

(3) $\varphi_t(x, y, z) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, z)$ とするとき、$\varphi_t^* F^*\alpha$ を求めよ。

(4) 写像 $G, H : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を $G(x, y, z) = (x, y, z - xy)$,

$H(x, y, z) = (x, y \cos x - z \sin x, y \sin x + z \cos x)$ で定義するとき、

$H^*G^*\alpha$ を計算せよ。

(5) $G\circ H$ のヤコビ行列式を計算せよ。$H^*G^*\alpha\wedge dH^*G^*\alpha$ を計算せよ。

【問題 5.7 の解答】 (1) $F^*\alpha = \mathrm{d}\,\dfrac{z-xy}{2} + x\,\mathrm{d}\,y = \mathrm{d}\,z + \dfrac{1}{2}(x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x).$

(2) $DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}y & -\frac{1}{2}x & 1 \end{pmatrix}$ だから、$\det DF = 1.$

$$\alpha\wedge\mathrm{d}\,\alpha = (\mathrm{d}z + x\,\mathrm{d}y)\wedge(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) = \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$$F^*\alpha\wedge\mathrm{d}\,F^*\alpha = (\mathrm{d}\,z + \frac{1}{2}(x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x))\wedge(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) = \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

(3)

$$\begin{aligned}
\varphi_t^*F^*\alpha &= \varphi_t^*(\mathrm{d}\,z + \frac{1}{2}(x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x)) \\
&= \mathrm{d}\,z + \frac{1}{2}((x\cos t - y\sin t)\,\mathrm{d}(x\sin t + y\cos t) \\
&\qquad\qquad -(x\sin t + y\cos t)\,\mathrm{d}(x\cos t - y\sin t)) \\
&= \mathrm{d}\,z + \frac{1}{2}((x\cos t - y\sin t)(\sin t\,\mathrm{d}\,x + \cos t\,\mathrm{d}\,y) \\
&\qquad\qquad -(x\sin t + y\cos t)(\cos t\,\mathrm{d}\,x - \sin t\,\mathrm{d}\,y)) \\
&= \mathrm{d}\,z + \frac{1}{2}(\{(x\cos t - y\sin t)\sin t - (x\sin t + y\cos t)\cos t\}\,\mathrm{d}\,x \\
&\qquad\qquad +\{(x\cos t - y\sin t)\cos t + (x\sin t + y\cos t)\sin t\}\,\mathrm{d}\,y \\
&= \mathrm{d}\,z + \frac{1}{2}(-y\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,y) = F^*\alpha
\end{aligned}$$

(4) $G^*\alpha = \mathrm{d}(z-xy) + x\,\mathrm{d}\,y = \mathrm{d}\,z - y\,\mathrm{d}\,x,$

$$\begin{aligned}
H^*G^*\alpha &= \mathrm{d}(z\cos x + y\sin x) - (y\cos x - z\sin x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= \sin x\,\mathrm{d}\,y + y\cos x\,\mathrm{d}\,x + \cos x\,\mathrm{d}\,z - z\sin x\,\mathrm{d}\,x - (y\cos x - z\sin x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= \cos x\,\mathrm{d}\,z + \sin x\,\mathrm{d}\,y
\end{aligned}$$

(5) $DG = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & -x & 1 \end{pmatrix}$, $DH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -y\sin x + z\cos x & \cos x & \sin x \\ y\cos x - z\sin x & \sin x & \cos x \end{pmatrix}$,
$D(G\circ H) = DG_{(H(x,y,z))}DH_{(x,y,z)}$ だから、

$$\det(D(G\circ H)) = \det DG_{(H(x,y,z))}\det DH_{(x,y,z)} = 1$$

である。

$$\begin{aligned}
&H^*G^*\alpha\wedge dH^*G^*\alpha \\
&= (\cos x\,\mathrm{d}\,z + \sin x\,\mathrm{d}\,y)\,\mathrm{d}(\cos x\,\mathrm{d}\,z + \sin x\,\mathrm{d}\,y) \\
&= (\cos x\,\mathrm{d}\,z + \sin x\,\mathrm{d}\,y)(-\sin x\,\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,z + \cos x\,\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y) \\
&= -(\sin x)^2\,\mathrm{d}\,y\wedge\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,z + (\cos x)^2\,\mathrm{d}\,z\wedge\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y \\
&= \mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y\wedge\mathrm{d}\,z
\end{aligned}$$

微分形式の引き戻しの外積は外積の引き戻しとなる。

【問題 5.8】 m 次元ユークリッド空間の開集合 V から n 次元ユークリッド空間の開集合 W への C^∞ 級写像 $\varphi : V \longrightarrow W$ と W 上の微分 p 形式 α, 微分 q 形式 β に対し、$\varphi^*(\alpha\wedge\beta) = \varphi^*\alpha\wedge\varphi^*\beta$ を示せ。

【解】

$$\begin{aligned}
&\varphi^*\Bigg(\bigg(\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}y_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_{i_p}\bigg)\wedge\bigg(\sum_{j_1<\cdots<j_q} g_{j_1\cdots j_q}\,\mathrm{d}y_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_{j_p}\bigg)\Bigg) \\
&= \varphi^*\bigg(\sum_{i_1<\cdots<i_p,\ j_1<\cdots<j_q} f_{i_1\cdots i_p}g_{j_1\cdots j_q}\,\mathrm{d}y_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_{i_p}\wedge\mathrm{d}y_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_{j_p}\bigg) \\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_p,\ j_1<\cdots<j_q} (f_{i_1\cdots i_p}\circ\varphi)(g_{j_1\cdots j_q}\circ\varphi)\,\mathrm{d}\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_p}\wedge\mathrm{d}\varphi_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{j_p} \\
&= \bigg(\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}\circ\varphi\,\mathrm{d}\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_p}\bigg)\wedge\bigg(\sum_{j_1<\cdots<j_q} g_{j_1\cdots j_q}\circ\varphi\,\mathrm{d}\varphi_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{j_p}\bigg) \\
&= \varphi^*\bigg(\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}y_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_{i_p}\bigg)\wedge\varphi^*\bigg(\sum_{j_1<\cdots<j_q} g_{j_1\cdots j_q}\,\mathrm{d}y_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_{j_p}\bigg)
\end{aligned}$$

【問題 5.9】　ユークリッド空間の開集合 $U \subset \boldsymbol{R}^\ell$, $V \subset \boldsymbol{R}^m$, $W \subset \boldsymbol{R}^n$, C^∞ 級写像 $\psi : U \longrightarrow V$, $\varphi : V \longrightarrow W$ と W 上の微分 p 形式 α に対し、$\psi^*\varphi^*\alpha = (\varphi\circ\psi)^*\alpha$ を示せ。

【解】　$\alpha = \displaystyle\sum_{j_1<\cdots<j_p} f_{j_1\cdots j_p}\, \mathrm{d}y_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{j_p}$ に対し、

$$
\begin{aligned}
&(\varphi\circ\psi)^*\alpha \\
&= \sum_{j_1<\cdots<j_p} f_{j_1\cdots j_p}\circ\varphi\circ\psi\, \mathrm{d}(\varphi_{j_1}\circ\psi) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(\varphi_{j_p}\circ\psi) \\
&= \sum_{j_1<\cdots<j_p} f_{j_1\cdots j_p}\circ\varphi\circ\psi \left(\sum_{i_1=1}^m \frac{\partial \varphi_{j_1}}{\partial x_{i_1}}\, \mathrm{d}\psi_{i_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_p=1}^m \frac{\partial \varphi_{j_p}}{\partial x_{i_p}}\, \mathrm{d}\psi_{i_p} \right) \\
&= \psi^*\left(\sum_{j_1<\cdots<j_p} f_{j_1\cdots j_p}\circ\varphi \left(\sum_{i_1=1}^m \frac{\partial \varphi_{j_1}}{\partial x_{i_1}}\, \mathrm{d}x_{i_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_p=1}^m \frac{\partial \varphi_{j_p}}{\partial x_{i_p}}\, \mathrm{d}x_{i_p} \right) \right) \\
&= \psi^*\left(\sum_{j_1<\cdots<j_p} f_{j_1\cdots j_p}\circ\varphi\, \mathrm{d}\varphi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\varphi_{j_p} \right) \\
&= \psi^*\left(\varphi^*\left(\sum_{j_1<\cdots<j_p} f_{j_1\cdots j_p}\, \mathrm{d}y_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{j_p} \right) \right) \\
&= \psi^*\varphi^*\alpha
\end{aligned}
$$

こうして定義された引き戻しをもとに、微分形式の積分を見直すと次のようになる。

n 次元ユークリッド空間の開集合 U 上の微分 1 形式 $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^n f_i\, \mathrm{d}x_i$ の $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ に沿う線積分 $\displaystyle\int_\gamma \alpha = \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t)) \frac{\mathrm{d}\,\gamma}{\mathrm{d}\,t}\, \mathrm{d}t$ に対し、$\gamma^*\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t)) \frac{\mathrm{d}\,\gamma}{\mathrm{d}\,t}\, \mathrm{d}t$ であるから、

$$
\int_\gamma \alpha = \int_{\mathrm{id}} \gamma^*\alpha
$$

となっている。

次に、U 上の微分 p 形式 $\alpha = \displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\ldots i_p}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}$ を $\kappa : [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_p,b_p] \longrightarrow U$ で引き戻すと、直方体 $[a_1,b_1] \times \cdots \times [a_p,b_p]$ 上の微分 p 形式

$$
\kappa^*\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\ldots i_p}(\kappa(t_1,\ldots,t_p)) \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_p} \end{pmatrix} \mathrm{d}t_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_p
$$

が得られる。定義 4.8 の積分の定義をみると、

$$
\int_\kappa \alpha = \int_{\mathrm{id}} \kappa^*\alpha
$$

となっていることがわかる。

従って、直方体 $[a_1,b_1] \times \cdots \times [a_p,b_p]$ 上の微分 p 形式 $f\, \mathrm{d}t_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_p$ に対し、

$$
\int_{\mathrm{id}} f(t_1,\ldots,t_p)\, \mathrm{d}t_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_p = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_p}^{b_p} f(t_1,\ldots,t_p)\, \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_p
$$

と最初に定義することにすると、定義 4.8 を $\displaystyle\int_\kappa \alpha = \int_{\mathrm{id}} \kappa^*\alpha$ に置き換えることができる。

この考察をもとに、$\kappa:[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_p,b_p]\longrightarrow V$ および $\varphi\circ\kappa:[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_p,b_p]\longrightarrow W$ に沿う積分に対して、次がいえる。

定理 5.10 m 次元ユークリッド空間の開集合 V から n 次元ユークリッド空間の開集合 W への C^∞ 級写像 $\varphi:V\longrightarrow W$ と W 上の微分 p 形式 α, p 次元直方体からの C^∞ 級写像 $\kappa:[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_p,b_p]\longrightarrow V$ に対し、

$$\int_\kappa \varphi^*\alpha=\int_{\varphi\circ\kappa}\alpha$$

証明 $\displaystyle\int_\kappa \varphi^*\alpha=\int_{\mathrm{id}}\kappa^*\varphi^*\alpha=\int_{\mathrm{id}}(\varphi\circ\kappa)^*\alpha=\int_{\varphi\circ\kappa}\alpha.$ ここで 2 番目の等号は例題 5.9 による。 ■

外微分も引き戻しも、直方体からの写像に沿う積分と整合するように定義されたものであるが、外微分と引き戻しは交換することがわかる。

定理 5.11 $\mathrm{d}\varphi^*\alpha=\varphi^*\,\mathrm{d}\alpha$

証明

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\varphi^*\alpha)&=\mathrm{d}(\varphi^*\Bigl(\sum_{i_1<\cdots<i_p}f_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}y_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_{i_p}\Bigr))\\
&=\mathrm{d}\Bigl(\sum_{i_1<\cdots<i_p}f_{i_1\cdots i_p}\circ\varphi\ \ \mathrm{d}\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_p}\Bigr)\\
&=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\mathrm{d}(f_{i_1\cdots i_p}\circ\varphi)\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_p}\\
&=\varphi^*\Bigl(\sum_{i_1<\cdots<i_p}\mathrm{d}f_{i_1\cdots i_p}\wedge\mathrm{d}y_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_{i_p}\Bigr)=\varphi^*\,\mathrm{d}\alpha
\end{aligned}$$

■

ここまでの準備の下で、問題 4.9(11 ページ)を考えると証明は非常に明快になる。

【問題 4.9 の別解答】 $\kappa^*\alpha$ は $p{+}1$ 次元の直方体上の微分 p 形式だから、$f_{1\cdots(q-1)(q+1)\cdots(p+1)}$ の代わりに f_i と書いて

$$\kappa^*\alpha=\sum_{q=1}^{p+1}f_q\,\mathrm{d}t_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{q-1}\wedge\mathrm{d}t_{q+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{p+1}$$

と書かれる。

$$\kappa^*(\mathrm{d}\,\alpha)=\mathrm{d}(\kappa^*\alpha)=\sum_{q=1}^{p+1}(-1)^{q-1}\frac{\partial f_q}{\partial t_q}\,\mathrm{d}t_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{p+1}$$

である。

$$\begin{aligned}
&\int_\kappa\mathrm{d}\,\alpha=\int_{\mathrm{id}}\kappa^*(\mathrm{d}\,\alpha)=\int_{\mathrm{id}}\mathrm{d}(\kappa^*\alpha)\\
&=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_{p+1}}^{b_{p+1}}\sum_{q=1}^{p+1}(-1)^{q-1}\frac{\partial f_q}{\partial t_q}\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{p+1}\\
&=\sum_{q=1}^{p+1}(-1)^{q-1}\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_{q-1}}^{b_{q-1}}\int_{a_{q+1}}^{b_{q+1}}\cdots\int_{a_{p+1}}^{b_{p+1}}\Bigl[f_q\Bigr]_{t_q=a_q}^{t_q=b_q}\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{q-1}\,\mathrm{d}t_{q+1}\cdots\mathrm{d}t_{p+1}\\
&=\sum_{q=1}^{p+1}(-1)^{q-1}\Bigl(\int_{\mathrm{id}}\kappa(\cdots,b_q,\cdots)^*\alpha-\int_{\mathrm{id}}\kappa(\cdots,a_q,\cdots)^*\alpha\Bigr)\\
&=\sum_{q=1}^{p+1}(-1)^{q-1}\Bigl(\int_{\kappa(\cdots,b_q,\cdots)}\alpha-\int_{\kappa(\cdots,a_q,\cdots)}\alpha\Bigr)
\end{aligned}$$