

復習問題. 複素平面 \mathbb{C} の開集合 U 上で定義された複素数値関数 $f(z)$ を考える。すなわち、 $z = x + y\sqrt{-1}$ として、2変数関数 $u(x, y), v(x, y)$ があって

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y)\sqrt{-1}$$

f が微分可能であるとき、次で定義される全微分は複素数値 1 次微分形式である。

$$df = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial x}\sqrt{-1}dx + \frac{\partial v}{\partial y}\sqrt{-1}dy$$

- (1) df が各点 z 上で、 $dz = dx + \sqrt{-1}dy$ 複素数倍となるための条件は何か。
- (2) 複素数値 1 次微分形式 $f dz$ が閉微分形式となる条件は何か。
- (3) 複素数値 1 次微分形式 $f dz$ が閉微分形式のときこれは完全微分形式か。

定義 [微分 p 形式] n 次元ユークリッド空間の開集合 U 上の連続関数 $f_{i_1 \dots i_p}(\mathbf{x})$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$) に対して、 $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ を、 U 上の微分 p 形式と呼ぶ。

定義 [微分 p 形式と微分 q 形式の外積]

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right) \wedge \left(\sum_{j_1 < \dots < j_q} g_{j_1 \dots j_q} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} \right) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p, j_1 < \dots < j_q} f_{i_1 \dots i_p} g_{j_1 \dots j_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} \end{aligned}$$

ここで、 $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$ のなかに同じものがあれば $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} = 0$ とし、これらがすべて異なり、これを並べ替えたものを k_1, \dots, k_{p+q} ($k_1 < \dots < k_{p+q}$) とするとき、 $\text{sign} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q \\ k_1 \dots k_{p+q} \end{pmatrix}$ を置換の符号として、

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} = \text{sign} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q \\ k_1 \dots k_{p+q} \end{pmatrix} dx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_{p+q}}$$

とする。

問題 1 . U 上の微分 p 形式 α と微分 q 形式 β に対し、 $\beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta$ を示せ。

定義 [微分 p 形式の外微分]

$$d \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} df_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

ここで、 df_i は f_i の全微分である。

問題 2 . U 上の微分 p 形式 α と微分 q 形式 β に対し、 $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$ を示せ。