２００６年度 幾何学 III 演習問題 １０月１７日

定義 [微分 p 形式の直方体からの写像に沿う積分] $\kappa : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p] \longrightarrow U$ に対し、

$$\int_\kappa \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \ldots i_p} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}$$

$$= \int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_p,b_p]} \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\ldots i_p}(\kappa(t_1,\ldots,t_p)) \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_p} \end{pmatrix} \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_p$$

問題１． n 次元ユークリッド空間の開集合 U 上の微分 p 形式 $\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$ の外微分 $\mathrm{d}\alpha$ に対し、$p+1$ 次元直方体 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{p+1}, b_{p+1}]$ から U への C^1 級写像 $\kappa : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{p+1}, b_{p+1}] \longrightarrow U$ に沿う積分が以下のような p 次元直方体から U への写像に沿う積分の和となることを示せ。

$$\int_\kappa \mathrm{d}\alpha = \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{q-1} \left(\int_{\kappa(\cdots,b_q,\cdots)} \alpha - \int_{\kappa(\cdots,a_q,\cdots)} \alpha \right)$$

定義 [微分 p 形式の引き戻し] m 次元ユークリッド空間の開集合 V から n 次元ユークリッド空間の開集合 W への C^∞ 級写像 $\varphi : V \longrightarrow W$ と W 上の微分 p 形式 $\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p} \mathrm{d}y_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{i_p}$ に対し、

$$\varphi^*\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p} \circ \varphi \; \mathrm{d}\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\varphi_{i_p}$$

を α の φ による引き戻しとよぶ。ただし、$\mathrm{d}\varphi_{i_j} = \sum_{k=1}^{m} \dfrac{\partial \varphi_{i_j}}{\partial x_k} \mathrm{d}x_k$ （全微分）である。

問題２． $\mathbf{R}^3$ の座標を (x, y, z) とし、$\mathbf{R}^3$ 上の微分１形式 $\alpha = \mathrm{d}z + x\mathrm{d}y$ を考える。
(1) 写像 $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ を $F(x, y, z) = (x, y, z - \dfrac{xy}{2})$ で定義するとき、$F^*\alpha$ を計算せよ。
(2) F のヤコビ行列式を計算せよ。$\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha$, $F^*\alpha \wedge \mathrm{d}F^*\alpha$ を計算せよ。
(3) $\varphi_t(x, y, z) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, z)$ とするとき、$\varphi_t^* F^*\alpha$ を求めよ。
(4) 写像 G, $H : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ を

$$G(x, y, z) = (x, y, z - xy), \quad H(x, y, z) = (x, y \cos x - z \sin x, y \sin x + z \cos x)$$

で定義するとき、$H^*G^*\alpha$ を計算せよ。
(5) $G \circ H$ のヤコビ行列式を計算せよ。$H^*G^*\alpha \wedge dH^*G^*\alpha$ を計算せよ。

問題３． m 次元ユークリッド空間の開集合 V から n 次元ユークリッド空間の開集合 W への C^∞ 級写像 $\varphi : V \longrightarrow W$ と W 上の微分 p 形式 α, 微分 q 形式 β に対し、$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$ を示せ。

問題４． ユークリッド空間の開集合 $U \subset \mathbf{R}^\ell$, $V \subset \mathbf{R}^m$, $W \subset \mathbf{R}^n$, C^∞ 級写像 $\psi : U \longrightarrow V$, $\varphi : V \longrightarrow W$ と W 上の微分 p 形式 α に対し、$\psi^*\varphi^*\alpha = (\varphi \circ \psi)^*\alpha$ を示せ。