２００６年度 幾何学 III　　演習問題　　１１月１４日

復習問題 (1) 円周 $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上の連続関数 f のフーリエ展開を $\sum_n a_n e^{2\pi\sqrt{-1}nt}$ とする ($a_n = \int_0^1 e^{-2\pi\sqrt{-1}nt} f(t)\mathrm{d}t$) とき、$f$ が C^∞ 級であることと、任意の正整数 r に対し $|n|^r|a_n|$ が有界であることは同値であることを示せ。(注意：f が実数値 $\iff \overline{a_{-n}} = a_n$)
(2) 円周 $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上の C^∞ 級微分１形式 $\alpha = g\mathrm{d}t$ について、$g = \sum_n b_n e^{2\pi\sqrt{-1}nt}$ とフーリエ展開し、α が全微分となるための条件を求めよ。

定義 [C^∞ ホモトピック] ２つの C^∞ 級写像 $\varphi_0, \varphi_1 : M \longrightarrow N$ が、C^∞ ホモトピックであるとは、C^∞ 級写像 $\varphi : [0,1] \times M \longrightarrow N$ で、$\varphi_0 = \varphi(0,\cdot)$, $\varphi_1 = \varphi(1,\cdot)$ となるものが存在することである。

問題１. $\varphi_0, \varphi_1 : M \longrightarrow N$ が、C^∞ ホモトピックのとき、${\varphi_0}^* = {\varphi_1}^*$ であることを示せ.

問題２. 多様体 M とユークリッド空間 $\mathbf{R}^m$ の直積 $\mathbf{R}^m \times M$ に対し、$H^p_{DR}(\mathbf{R}^m \times M) \cong H^p_{DR}(M)$ であることを示せ。

定義 [マイヤー・ビエトリス完全列] M_1, M_2 を（コンパクト）多様体 M の開集合で $M = M_1 \cup M_2$ を満たすものとする. $M_{12} = M_1 \cap M_2$ とおき,

$$\begin{array}{ll} i_1 : M_{12} \longrightarrow M_1 & i_2 : M_{12} \longrightarrow M_2 \\ j_1 : M_1 \longrightarrow M & j_2 : M_2 \longrightarrow M \end{array}$$

を包含写像とする. このとき、コチェイン写像の短完全列

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{(j_1^*, j_2^*)} \Omega^*(M_1) \oplus \Omega^*(M_2) \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} \Omega^*(M_{12}) \longrightarrow 0$$

が引き起こすドラームコホモロジーの長完全列をマイヤー・ビエトリス完全列と呼ぶ。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \cdots & \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} & H^{p-1}(M_{12}) \\ \xrightarrow{\Delta^*} & H^p(M) & \xrightarrow{(j_1^*, j_2^*)} & H^p(M_1) \oplus H^p(M_2) & \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} & H^p(M_{12}) \\ \xrightarrow{\Delta^*} & H^{p+1}(M) & \xrightarrow{(j_1^*, j_2^*)} & \cdots & & \end{array}$$

問題３. 円周 $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ を $M_1 = \pi((0,1))$, $M_2 = \pi((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ で被覆する。

$$0 \longrightarrow H^0_{DR}(S^1) \longrightarrow H^0_{DR}(M_1) \oplus H^0_{DR}(M_2) \longrightarrow H^0_{DR}(M_{12}) \longrightarrow H^1_{DR}(S^1) \longrightarrow 0$$

は次と同型である。

$$0 \longrightarrow \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} \longrightarrow H^1_{DR}(S^1) \longrightarrow 0$$

ここで H^0_{DR} は連結成分上定数であるような関数と同一視される。
$\nu_1 : [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow [0,1]$ を $[0, \frac{1}{6}]$ 上で 0, $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ 上で１であるような C^∞ 級関数, $\nu_2 : [\frac{1}{2}, 1] \longrightarrow [0,1]$ を $\nu_2(t) = \nu_1(t - \frac{1}{2})$ とする。ν_1, ν_2 とその導関数を使って、$\Delta^* : H^0_{DR}(M_{12}) \longrightarrow H^1_{DR}(S^1)$ を記述せよ ($\Delta^*(a,b)$ を代表する１形式を書け)。