コンパクト多様体のドラームコホモロジー群は有限次元のベクトル空間であることがわかった。これは、多様体 M 上の微分 p 形式 α に対して、$\mathrm{d}\,\beta=\alpha$ となる微分 $p-1$ 形式 β の存在に対して、次の結論を与える。このような β が存在するための必要十分条件は $\mathrm{d}\,\alpha=0$ かつ $[\alpha]=0\in H^p_{DR}(M)$ であることである。

これは、一方で多くのことを物語っている。たとえば、$H^p_{DR}(M)\cong 0$ がわかっていれば、α が具体的に与えられたとき、$\mathrm{d}\,\alpha-0$ となるかどうかは、具体的に局所座標系をとって計算されるから、これを計算して 0 となれば、β の存在がわかる。$H^p_{DR}(M)\cong \boldsymbol{R}^d$ ならば、$\alpha_1,\ldots,\alpha_{d+1}$ という $d+1$ 個の閉 p 形式が与えられたとき、その非自明な１次結合で $\mathrm{d}\,\beta$ と書かれるものがあることがわかる。

しかし、現在のところ、与えられた閉形式 α に対して、$[\alpha]=0$ となるかどうかを判定する道具は、マイヤービエトリス完全列を使うか、チェック・ドラーム複体を追いかけて、チェック複体上でコホモロジー類を計算することしか提示していない。

ドラーム理論はもっと重要なことも含んでいて、$[\alpha]=0$ かどうかの判定は有限個の積分を計算することでできることがわかる。

17　閉微分１形式の積分

多様体 M 上の微分 1 形式に対しては、見通し良く説明できる。

連結な多様体 M の１点 x_0 をとる。点 $x\in M$ に対し x と x_0 を結ぶ曲線 $\gamma_x:[0,1]\longrightarrow M$ $(\gamma_x(0)=x_0,\,\gamma_x(1)=x)$ をとり、連結な多様体 M 上の関数 f とその全微分 $\alpha=\mathrm{d}\,f$ に対して、

$$f(x)-f(x_0)=f(\gamma_x(1))-f(\gamma_x(0))=\int_0^1\frac{\mathrm{d}\,f\circ\gamma_x}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,t$$

であるが、多様体上の微分形式の定義 8.7（24 ページ）、微分形式の引き戻しの命題 10.6（27 ページ）によれば、$\dfrac{\mathrm{d}(f\circ\gamma_x)}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,t={\gamma_x}^*\,\mathrm{d}\,f$ である。すなわち、$\displaystyle\int_{\gamma_x}\alpha=\int_{\gamma_x}\mathrm{d}\,f$ を $\alpha=\mathrm{d}\,f$ を γ_x で引き戻した ${\gamma_x}^*\alpha={\gamma_x}^*\,\mathrm{d}\,f$ の $[0,1]$ 上の積分 $\displaystyle\int_0^1{\gamma_x}^*\alpha=\int_0^1{\gamma_x}^*\,\mathrm{d}\,f$ として定義すると、$\displaystyle f(x)-f(x_0)=\int_0^1{\gamma_x}^*\alpha$ である。

閉微分 1 形式 α に対して、積分 $\displaystyle\int_{\gamma_x}\alpha=\int_0^1{\gamma_x}^*\alpha$ の値が、x_0 と x を結ぶ曲線のとり方によらなければ、$\displaystyle f(x)=\int_{\gamma_x}\alpha$ と定義すると $\alpha=\mathrm{d}\,f$ となる。これは、多様体の１点 y の座標近傍上の点 x に対し、x_0 と x を結ぶ曲線を x_0 と y を結び、問題 2.8（5 ページ）のような y と x を結ぶ曲線の結合としてとることにすれば、問題 2.8 の結果からわかる。

さて、x_0,x を結ぶ 2 つの曲線 $\gamma_x^{(1)},\gamma_x^{(2)}$ に対して、$\gamma=\overline{\gamma_x^{(2)}}\gamma_x^{(1)}$ を $\gamma_x^{(1)}$ に沿って x_0 から x に行き、$\gamma_x^{(2)}$ を逆向きにたどって、x から x_0 にもどる閉曲線とすると、x_0 と x を結ぶ曲線のとり方によらないということは、このような閉曲線 γ に沿う積分が 0 になるということである。次のことがわかる。

$\alpha=\mathrm{d}\,f$ となる関数が存在することと、任意の閉曲線 γ に対して、$\displaystyle\int_\gamma\alpha=0$ となることは同値である。

従って、$[\alpha]\in H^1_{DR}(M)$ が 0 でなければ、ある閉曲線 γ に対して $\displaystyle\int_\gamma\alpha\neq 0$ となる。

ここで、M がコンパクトなら、閉1形式 α に対しては、次のことが成り立つ。$H^1_{DR}(M)\cong \boldsymbol{R}^k$ とする。M 上の k 個の閉曲線 $\gamma_1,\,\dots,\,\gamma_k$ が存在して、$\displaystyle\int_{\gamma_i}\alpha=0\ (i=1,\,\dots,\,k)$ ならば $\alpha=\mathrm{d}\,f$ となる関数 f が存在する。

これは、k 次元ベクトル空間 V とベクトル空間 W が与えられ、さらに双線形形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times W\longrightarrow \boldsymbol{R}$ で 0 でない任意の $v\in V$ に対し、$\langle v,w\rangle\neq 0$ となる $w\in W$ があるという場合、V の基底 $v_1,\,\dots,\,v_k$ に対し、W の元 $w_1,\,\dots,\,w_k$ で $\big(\langle v_i,w_j\rangle\big)_{i,j=1,\dots,k}$ が正則行列になるものがあるという命題である。

今の場合に即して書くと、実際 $H^1_{DR}(M)\cong\boldsymbol{R}^k$ の基底となる $[\alpha_1],\,\dots,\,[\alpha_k]$ をとったとする。$\big(\displaystyle\int_{\gamma_j}\alpha_i\big)_{i,j=1,\dots,m}$ が正則であるとする。$(\displaystyle\int_{\gamma_1}\alpha_{m+1},\dots,\int_{\gamma_m}\alpha_{m+1})$ に対し、$(a_1,\dots,a_m)$ が一意的に定まり、

$$(\int_{\gamma_1}\alpha_{m+1},\dots,\int_{\gamma_m}\alpha_{m+1})=\sum_{i=1}^m a_i(\int_{\gamma_1}\alpha_i,\dots,\int_{\gamma_m}\alpha_i)$$

となる。すなわち、$\displaystyle\int_{\gamma_j}(\alpha_{m+1}-\sum_{i=1}^m a_i\alpha_i)=0\ (j=1,\,\dots,\,m)$ となる。$\displaystyle\alpha_{m+1}-\sum_{i=1}^m a_i\alpha_i\neq 0$ だから、γ_{m+1} を $\displaystyle\int_{\gamma_{m+1}}(\alpha_{m+1}-\sum_{i=1}^m a_i\alpha_i)\neq 0$ を満たすようにとる。$\big(\displaystyle\int_{\gamma_j}\alpha_i\big)_{i,j=1,\dots,m+1}$ のランクは、最後の行を $(\displaystyle\int_{\gamma_j}(\alpha_{m+1}-\sum_{i=1}^m a_i\alpha_i))_{j=1,\dots,m}$ に取り替えたものと等しい。このとき、$\displaystyle\int_{\gamma_j}(\alpha_{m+1}-\sum_{i=1}^m a_i\alpha_i)=0\ (j=1,\,\dots,\,m)$ と γ_{m+1} のとりかたから、ランクは $m+1$ となる。従って、$[\alpha_1],\,\dots,\,[\alpha_k]$ に対して、$\big(\displaystyle\int_{\gamma_j}\alpha_i\big)_{i,j=1,\dots,k}$ が正則であるような $\gamma_1,\,\dots,\,\gamma_k$ が取れたことになる。

さて、閉1形式 α に対して、$\displaystyle\int_{\gamma_i}\alpha=0\ (i=0,\,\dots,\,k)$ とすると、$[\alpha]=0\in H^1_{DR}(M)$ であることがわかる。従って、$\alpha=\mathrm{d}\,f$ と書かれる。

【例 17.1】 n 次元トーラス $T^n=\boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ の1次元ドラームコホモロジー群は $\boldsymbol{R}^n$ と同型で基底として、$[\mathrm{d}\,x_1],\,\dots,\,[\mathrm{d}\,x_n]$ がとれる。ただし、$\boldsymbol{R}^n$ の基底を $e_1,\,\dots,\,e_n$ ととり、座標を $(x_1,\dots,x_n)$ としている。$\gamma_i:[0,1]\longrightarrow\boldsymbol{R}^n$ を $\gamma_i(t)=te_i$ で定義すると $\displaystyle\int_{\gamma_i}\mathrm{d}\,z_j=\delta_{ij}\ (\delta_{ii}=1,\ i\neq j$ ならば $\delta_{ij}=0)$ である。T^n 上の閉1形式 α に対して、$\displaystyle\int_{\gamma_i}\alpha=0\ (i=1,\,\dots,\,n)$ ならば $\alpha=\mathrm{d}\,f$ となる関数 f がある。一般に、$\displaystyle\alpha-\sum_{i=1}^n(\int_{\gamma_i}\alpha)\,\mathrm{d}\,x_i=\mathrm{d}\,f$ をみたす関数 f が存在する。

18 単体からの写像に沿う積分

前節の考察を次数の高い閉微分形式に対して拡張するために、単体からの写像に沿う積分を考える。

直方体から多様体 M への写像 $\kappa:[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_p,b_p]$ に沿って M 上の微分形式を積分することを考える。ここまでの引き戻しについての議論から次のように考えれば良い。

微分 p 形式 α を κ で引き戻すと、直方体 $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_p,b_p]$ 上の微分 p

形式 $\kappa^*\alpha$ が得られる。p は直方体の次元と一致しているので、

$$\kappa^*\alpha = f(t_1,\ldots,t_p)\,\mathrm{d}t_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_p$$

と書かれる。そこで、$\displaystyle\int_\kappa \alpha = \int_{\mathrm{id}}\kappa^*\alpha = \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_p}^{b_p} f(t_1,\ldots,t_p)\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_p$ と定義する。

【問題 18.1】　多様体 M 上の 2 点 x_0, x_1 を結ぶ C^∞ 級曲線 γ_0, $\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow M$ $(\gamma_0(0)=\gamma_1(0)=x_0,\ \gamma_0(1)=\gamma_1(1)=x_1)$ が両端を固定して C^∞ ホモトピックとする。すなわち、C^∞ 級写像 $F:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow M$ で、$F(0,t)=\gamma_0(t)$, $F(1,t)=\gamma_1(t)$, $F(s,0)=x_0$, $F(s,1)=x_1$ を満たすものが存在するとする。このとき、M 上の閉微分 1 形式 α に対し、$\displaystyle\int_{\gamma_0}\alpha=\int_{\gamma_1}\alpha$ となることを示せ。

【問題 18.1 の解答】$F^*\alpha$ を境界 $\partial[0,1]\times[0,1]$ で積分したものを考え、命題 2.9 を用いる。$\int_{[0,1]\times\{0\}}F^*\alpha=\int_{[0,1]\times\{1\}}F^*\alpha=0$ だから

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_1}\alpha-\int_{\gamma_0}\alpha\\
&=\int_0^1{\gamma_1}^*\alpha-\int_0^1{\gamma_0}^*\alpha\\
&=\int_{[0,1]\times\{0\}}F^*\alpha+\int_{\{1\}\times[0,1]}F^*\alpha-\int_{[0,1]\times\{1\}}F^*\alpha-\int_{\{0\}\times[0,1]}F^*\alpha\\
&=\textstyle\int_{[0,1]\times[0,1]}\mathrm{d}\,\alpha=0
\end{aligned}$$

直方体からの写像に沿う積分と同様に、単体からの写像に沿う積分が定義される。

p 次元単体 Δ^p は、

$$\Delta^p=\{(x_1,\ldots,x_p)\in\boldsymbol{R}^n \mid 1\geqq x_1\geqq\cdots\geqq x_p\geqq 0\}$$

で定義される。Δ^p 上の p 形式 $f(x_1,\ldots,x_p)\,\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_p$ の積分を

$$\begin{aligned}
&\int_{\Delta^p}f(x_1,\ldots,x_p)\,\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_p\\
&=\int_{x_1=0}^1\Big(\cdots\Big(\int_{x_i=0}^{x_{i-1}}\Big(\cdots\Big(\int_{x_p=0}^{x_{p-1}}f(x_1,\ldots,x_p)\,\mathrm{d}x_p\Big)\cdots\Big)\,\mathrm{d}x_i\Big)\cdots\Big)\,\mathrm{d}x_1
\end{aligned}$$

で定義する。また、p 次元単体 Δ^p から多様体 M への写像 $\sigma:\Delta^p\longrightarrow M$ に沿う M 上の微分 p 形式の積分 $\displaystyle\int_\sigma\alpha$ を次で定義する。

$$\int_\sigma\alpha=\int_{\Delta^p}\sigma^*\alpha$$

多様体 M への有限個の写像 $\sigma_i:\Delta^p\longrightarrow M$ $(i=1,\ldots,j)$ の形式的線形和 $\displaystyle\sum_{i=1}^j a_i\sigma_i$ $(a_i\in\boldsymbol{R})$ を p チェインと呼ぶ。p チェイン上の積分は、

$$\int_{\sum_{i=1}^j a_i\sigma_i}\alpha=\sum_{i=1}^j a_i\int_{\sigma_i}\alpha=\sum_{i=1}^j a_i\int_{\Delta^p}{\sigma_i}^*\alpha$$

で定義される。

直方体からの写像に対して述べたストークスの定理（問題 5.9（13 ページ））を単体からの写像に対してストークスの定理を定式化するために、つぎの写像を定義する。

$k=0, \ldots, p$ に対して、$\varepsilon_k : \Delta^{p-1} \longrightarrow \Delta^p$ を次で定義する。

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0(x_1, \ldots, x_{p-1}) = (1, x_1, \ldots, x_{p-1}),\\
&\varepsilon_k(x_1, \ldots, x_{p-1}) = (x_1, \ldots, x_k, x_k, \ldots, x_{p-1}) \quad (0<k<p),\\
&\varepsilon_p(x_1, \ldots, x_{p-1}) = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_{p-1}, 0)
\end{aligned}$$

このとき、境界 $\partial\sigma$ を $\partial\sigma = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \sigma \circ \varepsilon_k$ により定義する。

このとき次が成立する。

定理 18.2 (単体からの写像についてのストークスの定理) C^∞ 級多様体 M への C^∞ 級写像 $\sigma : \Delta^p \longrightarrow M$ と、M 上の微分 $p-1$ 形式 α に対し、次が成立する。

$$\int_\sigma \mathrm{d}\,\alpha = \int_{\partial\sigma} \alpha$$

証明 Δ^p 上の $p-1$ 形式 $\sigma^*\alpha$ は $\sigma^*\alpha = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1} f_k\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{k-1} \wedge \mathrm{d}x_{k+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_p$ と書かれ、$\mathrm{d}\,\alpha = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_p$ である．$\alpha_k = (-1)^{k-1} f_k\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{k-1} \wedge \mathrm{d}x_{k+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_p$ に対して、$\displaystyle\int_{\Delta^p} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_p = \int_{\sum_{i=0}^{p}(-1)^i \varepsilon_i} \alpha_k$ を示せばよい。

まず、$k=p$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\int_{\Delta^p} \frac{\partial f_p}{\partial x_p}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_p\\
&= \int_{x_1=0}^{1} \Big(\cdots \Big(\int_{x_p=0}^{x_{p-1}} \frac{\partial f_p}{\partial x_p}\,\mathrm{d}x_p \Big) \cdots \Big)\,\mathrm{d}x_1\\
&= \int_{x_1=0}^{1} \Big(\cdots \Big(\int_{x_{p-1}=0}^{x_{p-2}} \big(f_p(x_1, \cdots, x_{p-1}, x_{p-1})\\
&\qquad\qquad - f_p(x_1, \cdots, x_{p-1}, 0\big)\,\mathrm{d}x_{p-1}\Big) \cdots \Big)\,\mathrm{d}x_1\\
&= \int_{\varepsilon_{p-1}-\varepsilon_p} (-1)^{p-1}\alpha_p
\end{aligned}$$

$i \neq p-1, p$ ならば、$\displaystyle\int_{\varepsilon_i} (-1)^p \alpha_p = 0$ であるから、

$$\int_{\varepsilon_{p-1}-\varepsilon_p} (-1)^{p-1}\alpha_p = \int_{(-1)^{p-1}\varepsilon_{p-1}+(-1)^p\varepsilon_p} \alpha_p = \int_{\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\varepsilon_i} \alpha_p$$

$k<p$ に対しては、次の積分の順序交換の式を用いる。$\{(u,v) \in \boldsymbol{R}^2 \mid w \geqq u \geqq v \geqq 0\}$ 上の関数 $f(u,v)$ の積分について次が成立することに注意する。

$$\begin{aligned}
\int_{\{w \geqq u \geqq v \geqq 0\}} f(u,v)\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v &= \int_{u=0}^{w} \Big(\int_{v=0}^{u} f(u,v)\,\mathrm{d}\,v \Big)\,\mathrm{d}\,u\\
&= \int_{v=0}^{w} \Big(\int_{u=v}^{w} f(u,v)\,\mathrm{d}\,u \Big)\,\mathrm{d}\,v
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{\Delta^p} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}\,\mathrm{d}\,x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_p$ のなかの累次積分

$F(x_1, \cdots, x_{k+1}) = \displaystyle\int_{x_{k+2}=0}^{x_{k+1}} \cdots \int_{x_p=0}^{x_{p-1}} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_p)\,\mathrm{d}\,x_p \cdots \mathrm{d}\,x_{k+2}$ について、

$$\begin{aligned}
&\int_{x_k=0}^{x_{k-1}} \Big(\int_{x_{k+1}=0}^{x_k} F(x_1, \cdots, x_{k+1})\,\mathrm{d}\,x_{k+1} \Big)\,\mathrm{d}\,x_k\\
&= \int_{x_{k+1}=0}^{x_{k-1}} \Big(\int_{x_k=x_{k+1}}^{x_{k-1}} F(x_1, \cdots, x_{k+1})\,\mathrm{d}\,x_k \Big)\,\mathrm{d}\,x_{k+1}
\end{aligned}$$

であり、ここで、

$$\begin{aligned}&\int_{x_k=x_{k+1}}^{x_{k-1}} F(x_1,\cdots,x_{k+1})\,\mathrm{d}\,x_k\\
=&\int_{x_{k+2}=0}^{x_{k+1}}\cdots\int_{x_p=0}^{x_{p-1}}(f_k(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_p)\\
&\qquad -f_k(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},x_{k+1},\ldots,x_p))\,\mathrm{d}\,x_p\cdots\mathrm{d}\,x_{k+2}\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}&\int_{\Delta^p}\frac{\partial f_k}{\partial x_k}\,\mathrm{d}\,x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_p\\
=&\int_{x_1=0}^{1}\cdots\int_{x_{k-1}=0}^{x_{k-2}}\int_{x_{k+1}=0}^{x_{k-1}}\int_{x_{k+2}=0}^{x_{k+1}}\cdots\int_{x_p=0}^{x_{p-1}}\\
&\quad(f_k(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_p)\\
&\qquad -f_k(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},x_{k+1},\ldots,x_p))\\
&\qquad\quad \mathrm{d}\,x_p\cdots\mathrm{d}\,x_{k+2}\,\mathrm{d}\,x_{k+1}\,\mathrm{d}\,x_{k-1}\cdots\mathrm{d}\,x_1\end{aligned}$$

積分変数を $x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_p$ から $x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,\ldots,x_{p-1}$ にとりかえれば、最後の式は、$\displaystyle\int_{\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k}(-1)^{k-1}\alpha_k$ と等しい。$i\neq k-1,\,k$ ならば、$\displaystyle\int_{\varepsilon_i}(-1)^k\alpha_k=0$ であるから、

$$\int_{\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k}(-1)^{k-1}\alpha_k=\int_{(-1)^{k-1}\varepsilon_{k-1}+(-1)^k\varepsilon_k}\alpha_k=\int_{\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\varepsilon_i}\alpha_k$$

■

定理 18.2 の意味するものは何であろうか。

$S_p^\infty(M)$ を M の C^∞ 級のチェインのなすベクトル空間とする。すなわち、

$$S_p^\infty(M)=\{\sum a_i\sigma_i \mid a_i\in\boldsymbol{R},\ \sigma_i:\Delta^p\longrightarrow M\text{ は }C^\infty\text{ 級写像で、和は有限和}\}$$

ここで $S_p^\infty(M)\times\Omega^p(M)\longrightarrow\boldsymbol{R}$ という双線形写像が、

$$S_p^\infty(M)\times\Omega^p(M)\ni(c=\sum a_i\sigma_i,\alpha)\longmapsto\int_c\alpha=\sum a_i\int_{\sigma_i}\alpha\in\boldsymbol{R}$$

により定義されており、$c=\sum a_i\sigma_i\in S_p^\infty(M),\ \alpha\in\Omega^{p-1}(M)$ に対して $\displaystyle\int_c\mathrm{d}\,\alpha=\int_{\partial c}\alpha$ を満たしている。

外微分 d は微分形式全体 $\Omega^*(M)$ に対して定義され、$\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$ という性質から、ドラーム複体を定義している。境界作用素 ∂ は C^∞ 級チェインの全体 $S_*^\infty(M)$ に対して定義されていて、$\partial\circ\partial=0$ を満たす。従って

$$0\xleftarrow{\partial}S_0^\infty(M)\xleftarrow{\partial}S_1^\infty(M)\xleftarrow{\partial}S_2^\infty(M)\xleftarrow{\partial}\cdots$$

は複体をなす。これは M の C^∞ 級特異単体複体と呼ばれる。この複体のホモロジー群が $\ker\partial/\operatorname{im}\partial$ として定義される。$Z_p^\infty(M)=\ker(\partial:S_p^\infty\longrightarrow S_{p-1}^\infty)$ の元は p 次元 C^∞ 級特異サイクルと呼ばれ、$B_p^\infty(M)=\operatorname{im}(\partial:S_{p+1}^\infty\longrightarrow S_p^\infty)$ の元は p 次元 C^∞ 級特異バウンダリーと呼ばれる。$H_p^\infty(M)=Z_p^\infty(M)/B_p^\infty(M)$ が、p 次元 C^∞ 級特異ホモロジー群と呼ばれる。

もしも α が完全 p 形式で $\alpha=\mathrm{d}\,\beta$ と書かれれば、$\displaystyle\int_c\alpha=\int_c\mathrm{d}\,\beta=\int_{\partial c}\beta$ は $\partial c=0$ となるような p 次元チェイン c, すなわち p 次元サイクル c に対しては常に 0 でなければならない。実は、この逆が成立する。$\partial c=0$ となる任意

の p 次元サイクル $c \in S_p^\infty(M)$ に対して、$\displaystyle\int_c \alpha = 0$ ならば、$\alpha = \mathrm{d}\,\beta$ と書かれる。

さらに、c がバウンダリーであり、$c = \partial b$ とすると、閉形式 α $(\mathrm{d}\,\alpha = 0)$ に対し、$\displaystyle\int_c \alpha = \int_{\partial b} \alpha = \int_b \mathrm{d}\,\alpha = 0$ となる。従って、ホモロジー群 $H_p^\infty(M) = \ker\partial/\operatorname{im}\partial$ の基底をなすサイクルの集合に属するすべての c に対して $\displaystyle\int_c \alpha = 0$ ならば、$\alpha = \mathrm{d}\,\beta$ と書かれる。

ホモロジー群はコホモロジー群とベクトル空間としての次元は等しく、ホモロジー群 $H_p^\infty(M)$ の基底 $[c_1], \ldots, [c_k]$ をとることが出来る。ここで $k = \dim H_{DR}^p(M)$ である。これが、閉１形式についての命題の高次元化である。

実際、公理的ホモロジー理論によれは、いくつかの公理を満たすホモロジー理論同士、コホモロジー理論同士は同型となり、$S_*^\infty(M)$ の p 次元ホモロジー群 $H_p^\infty(M)$ の次元と $\Omega^*(M)$ の p 次元コホモロジー群 $H_{DR}^p(M)$ の次元が一致することも導かれる。

注意 18.3 C^∞ 級特異単体複体のチェインを定義する係数は実数係数としている。これを、整数係数でとれば、$H_p^\infty(M)$ は整数係数のホモロジー群と一致する。C^∞ 級特異単体複体 $S_*^\infty(M)$ は（単体からの連続写像を使って定義される）特異単体複体 $S_*(M)$ の部分複体であるが、包含写像 $S_*^\infty(M) \longrightarrow S_*(M)$ は任意の係数に対してホモロジー群の同型を導く。（これは単体からの連続写像を C^∞ 級写像で近似することにより示される。）

19 単体的ドラーム理論

この節では、M が単体分割（３角形分割）を持つとして、単体複体に対して、単体的ドラーム理論を展開し、$\Omega^*(M)$ の p 次元コホモロジー群が、単体複体のコホモロジー群と一致すること、単体複体のコホモロジー群とホモロジー群は、双対空間になっていて、次元が等しいことを示す。これにより、$H_{DR}^p(M) \cong \boldsymbol{R}^d$ のとき、M 上の p サイクル $c_1, \ldots, c_d$ が存在し、閉 p 形式 α に対して、$\alpha = \mathrm{d}\,\beta$ と書かれることと $\displaystyle\int_{c_i} \alpha = 0$ $(i = 1, \ldots, d)$ が同値となる。

まず、有限単体複体を定義しよう。

$\boldsymbol{R}^N$ の基底を $\{e_1, \cdots, e_N\}$ とする。

頂点 $\{e_{i_0}, \cdots, e_{i_k}\}$ $(i_0 < \cdots < i_k)$ を頂点とする k 次元単体（これらの点の凸包）を $\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k}\rangle$ で表すことにする。すなわち、

$$\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k}\rangle = \{\sum_{\ell=0}^{k} t_{i_\ell} e_{i_\ell} \big| t_{i_\ell} \geqq 0, \sum_{\ell=0}^{k} t_{i_\ell} = 1\}$$

この単体の点 $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} t_{i_\ell} e_{i_\ell}$ に対し、$(t_{i_0}, \ldots, t_{i_k})$ をその点の重心座標という。

有限単体複体 K とはこれらの単体からなる有限集合で、一つの k 次元単体 $\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k}\rangle$ を含めば、その面となる $k-1$ 次元単体 $\langle e_{i_0} \cdots, e_{i_{\ell-1}} e_{i_{\ell+1}} \cdots, e_{i_k}\rangle$ $(0 \leq \ell \leq k)$ を含む（従って、次元の低い面をすべて含む）ものである。$|K|$ で K に属する単体の和集合を表す。$|K|$ の点は重心座標で表されている。

有限単体複体 K の k チェインとは、K の単体の実数係数（有限）線形結合のことである。k チェイン全体の集合を $C_k(K)$ と書く。

$$C_k(K) = \{\sum a_i \sigma_i \ \big|\ a_i \in \boldsymbol{R},\ \sigma_i \text{ は } K \text{ の } k \text{ 単体 }\}$$

であり、$C_k(K)$ は、k 単体の個数と同じの次元のベクトル空間となる。k 単体 $\sigma = \langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle$ に対し、その境界 $\partial\sigma$ を $\partial\sigma = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \langle e_{i_0} \cdots e_{i_{j-1}} e_{i_{j+1}} \cdots e_{i_k} \rangle$ により定義する。これにより、境界準同型 $\partial : C_k(K) \longrightarrow C_{k-1}(K)$ が定義されるが、$\partial \circ \partial = 0$ となる。実際、

$$
\begin{aligned}
&(\partial \circ \partial)\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle \\
&= \partial \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \langle e_{i_0} \cdots e_{i_{j-1}} e_{i_{j+1}} \cdots e_{i_k} \rangle \\
&= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \partial \langle e_{i_0} \cdots e_{i_{j-1}} e_{i_{j+1}} \cdots e_{i_k} \rangle \\
&= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \Big(\sum_{\ell=0}^{j-1} (-1)^\ell \langle e_{i_0} \cdots e_{i_{\ell-1}} e_{i_{\ell+1}} \cdots e_{i_{j-1}} e_{i_{j+1}} \cdots e_{i_k} \rangle \\
&\qquad\qquad + \sum_{\ell=j+1}^{k} (-1)^{\ell-1} \langle e_{i_0} \cdots e_{i_{j-1}} e_{i_{j+1}} \cdots e_{i_{\ell-1}} e_{i_{\ell+1}} \cdots e_{i_k} \rangle \Big) \\
&= \sum_{s<t} ((-1)^{s+t} + (-1)^{s+t-1}) \langle e_{i_0} \cdots e_{i_{s-1}} e_{i_{s+1}} \cdots e_{i_{t-1}} e_{i_{t+1}} \cdots e_{i_k} \rangle = 0
\end{aligned}
$$

そこで

$$C_*(K) : 0 \xleftarrow{\partial} C_0(K) \xleftarrow{\partial} C_1(K) \xleftarrow{\partial} C_2(K) \xleftarrow{\partial} \cdots$$

という複体が得られる。ここで $H_k(K) = \ker\partial / \operatorname{im}\partial$ により実係数ホモロジー群が得られる。

また、有限単体複体 K のコホモロジーは次で定義される。

$C^k(K)$ を K の k 次元単体上の実数値関数のなすベクトル空間とする。$C^k(K)$ の元 c の k 次元単体 $\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle$ での値を $c(i_0, \ldots, i_k)$ と書くことにする。$C^k(K)$ の元 c, $C_k(K)$ の元 $\sum a_i \sigma_i$ に対し、$c(\sum a_i \sigma_i) \in \boldsymbol{R}$ を $c(\sum a_i \sigma_i) = \sum a_i c(\sigma_i)$ と定義すると、$C^k(K)$ の元は $C_k(K)$ 上の線形形式である。これにより、$C^k(K)$ は $C_k(K)$ の双対ベクトル空間である。

$\delta : C^k(K) \longrightarrow C^{k+1}(K)$ を

$$(\delta c)(i_0, \ldots, i_{k+1}) = \sum_{\ell=0}^{k+1} (-1)^\ell c(i_0, \ldots, i_{\ell-1}, i_{\ell+1}, \ldots, i_{k+1})$$

で定義する。この定義は、$(\delta c)(\sigma) = c(\partial\sigma)$ としたものである。そうすると $\partial \circ \partial = 0$ から $\delta \circ \delta = 0$ がわかる。有限単体複体 K のコホモロジーは、K のコチェイン複体

$$C^*(K) : 0 \xrightarrow{\delta} C^0(K) \xrightarrow{\delta} C^1(K) \xrightarrow{\delta} C^2(K) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

のコホモロジーとして $H^*(K) = \ker\delta / \operatorname{im}\delta$ で定義される。

ここで $\dim H_k(K) = \dim H^k(K)$ が容易にわかる。すなわち、$C_*(K)$ に単体から与えられる基底をとり、$C_k(K)$ は列ベクトルで表されるとする。境界準同型 ∂ を下の図のように行列 A, B で表すと、$\partial \circ \partial = 0$ だから、AB は零行列である。

$$
\begin{array}{ccccc}
C_{k-1}(K) & \longleftarrow & C_k(K) & \longleftarrow & C_{k+1}(K) \\
 & A & & B & \\
C^{k-1}(K) & \longrightarrow & C^k(K) & \longrightarrow & C^{k+1}(K)
\end{array}
$$

$C^k(K)$ は $C_k(K)$ 上の線形形式の空間だから行ベクトルで表されると考え、同じ A, B が行ベクトルに作用すると考えたものが δ である。行ベクトルを列ベクトルに同一視し, $C^k(K)$ と $C_k(K)$ の間の積はユークリッドの内積とみる。

ベクトル $v_1, \ldots, v_k$ に対し、$\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ で、ベクトル $v_1, \ldots, v_k$ の張る部分ベクトル空間 $\{\sum_{i=1}^{k} a_i v_i \mid a_i \in \boldsymbol{R}\}$ を表すことにする。

A の行ベクトルを $a_1, \ldots, a_\ell$ とする ($A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_\ell \end{pmatrix}$) と、$\ker\partial = \langle {}^t a_1, \ldots, {}^t a_\ell\rangle^\perp$, B の列ベクトルを $b_1, \ldots, b_n$ とする ($B = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$) と、$\operatorname{im}\partial = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle$ であり、

$$\langle b_1, \ldots, b_n\rangle \subset \langle {}^t a_1, \ldots, {}^t a_\ell\rangle^\perp$$

である。一方、$\ker\delta = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle^\perp$, $\operatorname{im}\delta = \langle {}^t a_1, \ldots, {}^t a_\ell\rangle$ であり、

$$\langle {}^t a_1, \ldots, {}^t a_\ell\rangle \subset \langle b_1, \ldots, b_n\rangle^\perp$$

である。

この書き方で、$V = \langle {}^t a_1, \ldots, {}^t a_\ell\rangle^\perp \cap \langle b_1, \ldots, b_n\rangle^\perp$ とすると、

$$\langle {}^t a_1, \ldots, {}^t a_\ell\rangle^\perp / \langle b_1, \ldots, b_n\rangle \cong V \cong \langle b_1, \ldots, b_n\rangle^\perp / \langle {}^t a_1, \ldots, {}^t a_\ell\rangle$$

すなわち、

$$\ker\partial / \operatorname{im}\partial \cong \ker\delta / \operatorname{im}\delta$$

さらに、$C^k(K)$ と $C_k(K)$ の間の積を、行ベクトルを列ベクトルに同一視のもとで, ユークリッドの内積とみたが、そのユークリッドの内積の V 上への制限が、$H^k(K)$ と $H_k(K)$ の間の積を引き起こし、これは、$C^k(K)$ と $C_k(K)$ の間の積から引き起こされたものに一致する。

有限単体複体 K のドラーム複体 $\Omega^*(K)$ を次のように定義する。

$\Omega^k(K)$ の元 ω とは K のすべての単体 σ から、その上の k 次微分形式 ω_σ への対応であり、m 次元単体 $\sigma = \langle e_{i_0} \cdots e_{i_m}\rangle$ とその面となる $m-1$ 次元単体 $\tau = \langle e_{i_0} \cdots e_{i_{\ell-1}} e_{i_{\ell+1}} \cdots e_{i_m}\rangle$ に対し、ω_σ の τ への制限が ω_τ と一致する $(\omega_\sigma|\tau = \omega_\tau)$ ものである。

外微分 $\mathrm{d} : \Omega^k(K) \longrightarrow \Omega^{k+1}(K)$ について、$\mathrm{d}\circ\mathrm{d} = 0$ であり、有限単体複体 K のドラーム・コホモロジー $H^*_{DR}(K) = \ker\mathrm{d} \,/\, \operatorname{im}\mathrm{d}$ が定義される。

多様体 M の微分可能な単体分割とは、単体複体 K からの同相写像 $\varphi : K \longrightarrow M$ で、各単体の上で微分可能なものとする。

チェック・ドラーム理論により、$\Omega^*(M)$ と $C^*(K)$ のコホモロジー群が同型であることがわかる。また、これから説明する単体的ドラーム理論から、$\Omega^*(K)$ と $C^*(K)$ のコホモロジー群が同型であることがわかる。

多様体 M が微分可能な単体分割 $\varphi : K \longrightarrow M$ を持つとする。このとき、チェック・ドラーム理論が適用できる M の開被覆を次のようにとることができる。

K の各頂点 e_i に対し、U_i を e_i のまわりの開星状体 $\mathrm{star}(e_i)$ とする。$U_{i_0\cdots i_k} = \bigcap_{\ell=0}^{k} U_{i_\ell}$ とすると、$U_{i_0\cdots i_k}$ は星型であり、従って、$\varphi(U_{i_0\cdots i_k})$ に対してポアンカレの補題が成立する。従って、$\bigoplus_{i_1<\cdots<i_p} \Omega^p(U_{i_0\cdots i_k})$ についてチェック・ドラーム理論が成立する。

$U_{i_0\cdots i_k}$ が空でないのは $\langle e_{i_0}\cdots e_{i_k}\rangle$ が K の k 次元単体であることと同値であり、開被覆 $\{U_i\}=\{\mathrm{star}(e_i)\}$ についてのチェック複体は K のコチェイン複体 $C^*(K)$ と一致する。

単体的ドラーム理論の重要なところは単体上の積分が、有限単体複体 K のドラーム複体 $\Omega^*(K)$ と K のコチェイン複体 $C^*(K)$ の関係を与えることである。

$\Delta^k=\{(x_1,\dots,x_k)\mid 1\geqq x_1\geqq\cdots\geqq x_k\geqq 0\}$ から $\sigma=\langle e_{i_0}\cdots e_{i_k}\rangle$ への写像を σ と書く. σ は、

$$\sigma(x_1,\dots,x_k)=(1-x_1)e_{i_0}+(x_1-x_2)e_{i_1}+\cdots+(x_k-x_{k-1})e_{i_{k-1}}+x_ke_{i_k}$$

と定義する

$\omega\in\Omega^k(K)$ と K の k 次元単体 $\sigma=\langle e_{i_0}\cdots e_{i_k}\rangle$ に対し、$\displaystyle\int_\sigma\omega\in\boldsymbol{R}$ を対応させる対応は K の k 次コチェインを与える。この写像を $I:\Omega^*(K)\longrightarrow C^*(K)$ と書く。単体からの写像についてのストークスの定理 18.2 から I はコチェイン写像 $(I\circ\mathrm{d}=\delta\circ I)$ となる。

定理 19.1 (単体的ドラームの定理) I は有限単体複体 K のドラームコホモロジー $H^*_{DR}(K)$ と K のコホモロジー $H^*(K)$ の間の同型写像を誘導する。

証明のためにコチェイン写像 $s:C^*(K)\longrightarrow\Omega^*(K)$ で、$I\circ s=\mathrm{id}_{C^*(K)}$ を構成する。チェック・ドラーム理論により、$H^*_{DR}(K)$ と $H^*(K)$ が同型であり、有限次元ベクトル空間となることがわかっているので I が同型写像を誘導することがわかる。

k 次元単体 $\langle e_{i_0},\cdots,e_{i_k}\rangle$ に対し考える k 次微分形式は

$$\omega_{i_0\cdots i_k}=k!\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell t_{i_\ell}\,\mathrm{d}t_{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_{\ell-1}}\wedge\mathrm{d}t_{i_{\ell+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_k}$$

とすると良い。この微分形式は $\langle e_{i_0}\cdots e_{i_k}\rangle$ を含むすべての単体上で定義されている。係数が t_i について 1 次であることに注意する。

この $\omega_{i_0\cdots i_k}$ に対して、$\displaystyle\int_{\langle e_{i_0},\cdots,e_{i_k}\rangle}\omega_{i_0\cdots i_k}=1$ となる。実際、$x_0=1,x_{k+1}=0$ として、

$$\begin{aligned}
&\int_{\langle e_{i_0},\cdots,e_{i_k}\rangle}\omega_{i_0\cdots i_k}\\
&=\int_{\Delta^k}k!\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell(x_\ell-x_{\ell+1})\,\mathrm{d}(1-x_1)\wedge(x_1-x_2)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}(x_{\ell-1}-x_\ell)\\
&\qquad\qquad\wedge\mathrm{d}(x_{\ell+1}-x_{\ell+2})\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}(x_k-x_{k-1})\wedge\mathrm{d}(x_k)\\
&=\int_{\Delta^k}k!\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell(x_\ell-x_{\ell+1})(-1)^\ell\,\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\ell-1}\wedge\mathrm{d}x_\ell\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_k\\
&=\int_{\Delta^k}k!\,\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\ell-1}\wedge\mathrm{d}x_\ell\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_k=1
\end{aligned}$$

s の構成を可能にしている事実は次の通りである。

s の像を $\omega_{i_0\cdots i_k}$ を用いてつくると、これがコチェイン写像となる $(\mathrm{d}\circ s=s\circ\delta)$ ためには、$\mathrm{d}\,\omega_{i_0\cdots i_k}=(k+1)!\,\mathrm{d}t_{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_k}$ （この係数は t_i について零次）が $\omega_{j_0\cdots j_{k+1}}$ の和にかかれる必要がある。特に、$k=0$ のとき、$\mathrm{d}\,\omega_i=\mathrm{d}t_i$ につ

いて、そうでなければならない。ところが、K の m 次元単体 $\sigma = \langle e_{j_0} \cdots e_{j_m} \rangle$ 上で、

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}t_{j_\ell} &= (\sum_{a=0}^{m} t_{j_a})\,\mathrm{d}t_{j_\ell} = (\sum_{j_a \in \{j_0,\cdots,j_m\}-\{j_\ell\}} t_{j_a})\,\mathrm{d}t_{j_\ell} + t_{j_\ell}\,\mathrm{d}t_{j_\ell} \\
&= (\sum_{j_a \in \{j_0,\cdots,j_m\}-\{j_\ell\}} t_{j_a})\,\mathrm{d}t_{j_\ell} + t_{j_\ell}\,\mathrm{d}(1 - \sum_{j_a \in \{j_0,\cdots,j_m\}-\{j_\ell\}} t_{j_a}) \\
&= \sum_{j_a \in \{j_0,\cdots,j_m\}-\{j_\ell\}} (t_{j_a}\,\mathrm{d}t_{j_\ell} - t_{j_\ell}\,\mathrm{d}t_{j_a})
\end{aligned}$$

これは $\omega_{j_a j_\ell}$ $(j_a < j_\ell)$ および $\omega_{j_\ell j_a}$ $(j_\ell < j_a)$ の和である。実際

$$\mathrm{d}t_{j_\ell} = \sum_{\{i_0,i_1\}-\{i_1\}=\{j_\ell\}} \omega_{i_0 i_1} - \sum_{\{i_0,i_1\}-\{i_0\}=\{j_\ell\}} \omega_{i_0 i_1}$$

同様に $\mathrm{d}\,\omega_{i_0\cdots i_k}$ についても K の m 次元単体 $\sigma = \langle e_{j_0} \cdots e_{j_m} \rangle$ $(\{i_0,\cdots,i_k\} \subset \{j_0,\cdots,j_m\},\ i_0 < \cdots < i_k,\ j_0 < \cdots < j_m)$ 上で、

$$\begin{aligned}
&(k+1)!\,\mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k} = (k+1)!((\sum_{a=0}^{m} t_{j_a})\,\mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k}) \\
= \ &(k+1)!(\sum_{j_a \in \{j_0,\cdots,j_m\}-\{i_0,\cdots,i_k\}} t_{j_a}\,\mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k} + \sum_{\ell=0}^{k} t_{i_\ell}\,\mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k})
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&t_{i_\ell}\,\mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k} \\
&= t_{i_\ell}\,\mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_{\ell-1}} \wedge \mathrm{d}(1 - \sum_{j_a \in \{j_0,\cdots,j_m\}-\{i_\ell\}} t_{j_a}) \wedge \mathrm{d}t_{i_{\ell+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k} \\
&= -\sum_{j_a \in \{j_0,\cdots,j_m\}-\{i_0,\cdots,i_k\}} (-1)^{\ell} t_{i_\ell}\,\mathrm{d}t_{j_a} \wedge \mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_{\ell-1}} \wedge \mathrm{d}t_{i_{\ell+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k}
\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}
&(k+1)!\,\mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k} \\
&= (k+1)!(\sum_{j_a \in \{j_0,\cdots,j_m\}-\{i_0,\cdots,i_k\}} t_{j_a}\,\mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k} \\
&\qquad - \sum_{j_a \in \{j_0,\cdots,j_m\}-\{i_0,\cdots,i_k\}} \sum_{\ell=0}^{k} \\
&\qquad\quad (-1)^{\ell} t_{i_\ell}\,\mathrm{d}t_{j_a} \wedge \mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_{\ell-1}} \wedge \mathrm{d}t_{i_{\ell+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k}) \\
&= (k+1)! \sum_{\{b_0,\cdots b_{k+1}\}-\{b_u\}=\{i_0,\cdots,i_k\}} (-1)^u \sum_{v=0}^{k+1} \\
&\qquad\quad (-1)^v t_{b_v}\,\mathrm{d}t_{b_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{b_{v-1}} \wedge \mathrm{d}t_{b_{v+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{b_{k+1}}
\end{aligned}$$

ここで、$b_0 < \cdots < b_{k+1}$ とする。結局、次の関係式が成立する。

$$\mathrm{d}\,\omega_{i_0\cdots i_k} = \sum_{\{b_0,\cdots,b_{k+1}\}-\{b_u\}=\{i_0,\cdots,i_k\}} (-1)^u \omega_{b_0\cdots b_{k+1}}$$

定理 19.1 の証明　$s : C^*(K) \longrightarrow \Omega^*(K)$ で、$I \circ s = \mathrm{id}_{C^*(K)}$ を定義する。

$c \in C^0(K)$ に対しては、対応する $\Omega^0(K)$ の元は $|K|$ 上の関数であり、リーヅナブルな取り方は、頂点 e_i で $c(i)$ をとる関数を線形に拡張したものである。すなわち、K の m 次元単体 $\sigma = \langle e_{j_0}, \cdots, e_{j_m} \rangle$ 上で、

$$s(c)_\sigma = \sum_{\ell=0}^{m} c(j_\ell) t_{j_\ell}$$

これについて、外微分をとると

$$
\begin{aligned}
ds(c)_\sigma &= \sum_{\ell=0}^{m} c(j_\ell)\,\mathrm{d}t_{j_\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^{m} c(j_\ell)\Big(\sum_{\{i_0,i_1\}-\{i_1\}=\{j_\ell\}} \omega_{i_0 i_1} - \sum_{\{i_0,i_1\}-\{i_0\}=\{j_\ell\}} \omega_{i_0 i_1}\Big) \\
&= \sum_{\{i_0,i_1\}\subset\{j_0,\cdots,j_m\}} (c(i_0)\omega_{i_0 i_1} - c(i_1)\omega_{i_0 i_1}) \\
&= \sum_{\{i_0,i_1\}\subset\{j_0,\cdots,j_m\}} (c(i_0) - c(i_1))\omega_{i_0 i_1}
\end{aligned}
$$

ここで $i_0 < i_1$ とする。これを δc の像にする必要があるが、それは $\delta c(i_0, i_1) = c(i_0) - c(i_1)$ であるから、$c^1 \in C^1(K)$ に対し、

$$
s(c^1)_\sigma = \sum_{\{i_0,i_1\}\subset\{j_0,\cdots,j_m\}} c^1(i_0,i_1)\omega_{i_0 i_1}
$$

とすればよい。

一般に $c \in C^k(K)$ に対し、次のように s を定義する。K の m 次元単体 $\sigma = \langle e_{j_0}\cdots e_{j_m}\rangle$ $(m \geq k)$ 上で、

$$
s(c)_\sigma = \sum_{\{i_0,\cdots,i_k\}\subset\{j_0,\cdots,j_m\}} c(i_0,\cdots,i_k)\omega_{i_0\cdots i_k}
$$

これは $\Omega^k(K)$ の元となる。

s がコチェイン写像であること $(\mathrm{d}\circ s = s\circ\delta)$ が次のように確かめられる

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\,s(c)_\sigma \\
&= \sum_{\{i_0,\cdots,i_k\}\subset\{j_0,\cdots,j_m\}} c(i_0,\cdots,i_k)\,\mathrm{d}\,\omega_{i_0\cdots i_k} \\
&= \sum_{\{i_0,\cdots,i_k\}\subset\{j_0,\cdots,j_m\}} c(i_0,\cdots,i_k) \sum_{\{b_0,\cdots b_{k+1}\}-\{b_u\}=\{i_0,\cdots,i_k\}} (-1)^u\omega_{b_0\cdots b_{k+1}} \\
&= \sum_{\{b_0,\cdots b_{k+1}\}\subset\{j_0,\cdots,j_m\}} \Big(\sum_{u=0}^{k+1}(-1)^u c(b_0,\cdots,b_{u-1},b_{u+1},\cdots b_{k+1})\Big)\omega_{b_0\cdots b_{k+1}} \\
&= \sum_{\{b_0,\cdots b_{k+1}\}\subset\{j_0,\cdots,j_m\}} (\delta c)(b_0,\cdots b_{k+1})\omega_{b_0\cdots b_{k+1}} = s(\delta(c))_\sigma
\end{aligned}
$$

■

20　多様体上の積分

これまで、微分 p 形式の直方体あるいは単体からの写像に沿う積分を考えてきた。この積分は、符号を除いて直方体あるいは単体の像のみに依っている。この積分の正負の符号は、直方体あるいは単体からの写像には自然に向きが定まっているために定まると考えられる。

コンパクト n 次元多様体の微分形式を考える。コンパクト n 次元多様体を n 次元直方体からの C^1 級写像の像でうまく覆うことは出来そうであるから、コンパクト n 次元多様体上の微分 n 形式は、多様体上で積分できそうである。これは、一般には正しくないが、多様体に向きが定まっているときには積分することができる。

定義 20.1 多様体 M の座標近傍系 $\{(U_i,\varphi_i)\}$ に対し，$\gamma_{ij} : \varphi_j(U_i\cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i\cap U_j)$ を座標変換とする．γ_{ij} のヤコビ行列式がすべて正であるような座標近傍系が存在するとき多様体は向き付けを持つという．

多様体上の積分の定義のためには、向き付けを持つだけでは不足で、向き付けを定める必要がある。

定義 20.2 多様体 M が定義 *20.1* の意味で向き付けを持つとする。γ_{ij} のヤコビ行列式がすべて正であるような座標近傍系を１つとってあるとき、多様体は向き付けられているという。

$(x_1, \ldots, x_n)$ を座標とする n 次元ユークリッド空間には、この座標の順による向きが定まっていると考える。これは、ユークリッド空間の開集合 U 上の微分 n 形式を U 内の直方体 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ 上で積分するときに $\displaystyle\int_{\mathrm{id}} f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f\,\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n$ と定め、これの -1 倍とはしないことによる。

積分の定義のためにも次の定義をしておく。

定義 20.3 多様体 M 上の微分 p 形式 α の台 *(support)* $\mathrm{supp}\,\alpha$ は、次で定義される。

$$\mathrm{supp}\,\alpha = \overline{\{x \in M \mid \alpha(x) \neq 0\}}$$

$(U, \varphi = \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n))$ を座標近傍とする。U のコンパクト部分集合 K に台をもつ微分 n 形式 α の積分を次のように考えることができる。微分 n 形式 α は、$\alpha = f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ と表される。$\varphi(K)$ が $\varphi(U)$ に含まれる直方体 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ に含まれているならば、α の $\kappa = \varphi^{-1}|[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ に沿う積分

$$\int_\kappa \alpha = \int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

は、α の φ^{-1} に沿う積分と呼んでよいものであろう。$\varphi(K)$ が、１つの U 内の直方体に含まれなくとも、$\varphi(K)$ はコンパクトだから有限個の内部が交わらない直方体で覆うことができる。結局、$\displaystyle\int_{\varphi^{-1}} \alpha$ が、$\displaystyle\int_{\varphi(U)} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$ あるいは、$f(\boldsymbol{x})$ を $\varphi(U)$ の外部に 0 として拡張し、$\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^n} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$ として、定義されることになる。

定義 20.2 のように、M が向き付けられているとする。

命題 20.4 向き付けられた座標近傍系の座標近傍 $(U, \varphi = \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n))$, $(V, \psi = \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n))$ に対し、$U \cap V$ のコンパクト部分集合 K に台を持つ微分 n 形式 α の積分を考えると、

$$\int_{\varphi^{-1}} \alpha = \int_{\psi^{-1}} \alpha$$

となる。

証明 $(V, \varphi = \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n))$ において、$\alpha = g(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n$ と書かれていれば、$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \varphi(U \cap V)$ は、

$$(\varphi \circ \psi^{-1})(\boldsymbol{y}) = (x_1(\boldsymbol{y}), \ldots, x_n(\boldsymbol{y}))$$

と書かれており、

$$\begin{aligned}
&g(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n \\
&= f(x_1(\boldsymbol{y}), \ldots, x_n(\boldsymbol{y}))\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n \\
&= f(x_1(\boldsymbol{y}), \ldots, x_n(\boldsymbol{y})) \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n
\end{aligned}$$

である。

$$
\begin{aligned}
&\int_{\varphi^{-1}|\psi(U\cap V)} \alpha \\
&= \int_{\varphi(U\cap V)} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \\
&= \int_{\psi(U\cap V)} f(x_1(\boldsymbol{y}),\ldots,x_n(\boldsymbol{y}))\left|\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}\right| \mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n \\
&= \int_{\psi(U\cap V)} g(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n \\
&= \int_{\psi^{-1}|\psi(U\cap V)} \alpha
\end{aligned}
$$

■

ここで、積分の変数変換において、$\det D(\varphi\circ\psi^{-1})$ は正なので、絶対値が必要がなくなることが効いている。

コンパクトで向き付けられた多様体 M 上の微分 n 形式 α の積分を考えよう。

命題 20.5 向き付けられた座標近傍系 $\{(U_i,\varphi_i)\}$ に従属する 1 の分割 $\{\lambda_i\}$ および同じ向き付けを与える座標近傍系 $\{(V_j,\psi_j)\}$ に従属する 1 の分割 $\{\mu_j\}$ に対し、

$$\sum_i \int_{{\varphi_i}^{-1}} \lambda_i\alpha = \sum_i \int_{{\psi_j}^{-1}} \mu_j\alpha$$

証明 $\{U_i\cap U_j\}$ は M の開被覆であり、$\lambda_j\mu_j$ はそれに従属した 1 の分割である。

$$
\begin{aligned}
\sum_i \int_{{\varphi_i}^{-1}} \lambda_i\alpha &= (\sum_j \mu_j)\sum_i \int_{{\varphi_i}^{-1}} \lambda_i\alpha = \sum_i\sum_j \int_{{\varphi_i}^{-1}} \lambda_i\mu_j\alpha \\
&= \sum_i\sum_j \int_{{\psi_j}^{-1}} \lambda_i\mu_j\alpha = (\sum_i \lambda_i)\sum_j \int_{{\psi_j}^{-1}} \mu_j\alpha = \sum_i \int_{{\psi_j}^{-1}} \mu_j\alpha
\end{aligned}
$$

ここで、3 番目の等号は、命題 20.4 による。 ■

定義 20.6 コンパクトで向き付けられた多様体 M 上の微分 n 形式 α の積分を、向き付けられた座標近傍系 $\{(U_i,\varphi_i)\}$ に従属する 1 の分割 $\{\lambda_i\}$ を用いて、次の和で定義する。

$$\int_M \alpha = \sum_i \int_{{\varphi_i}^{-1}} \lambda_i\alpha$$

命題 20.5 により、この積分の値は座標近傍系、1 の分割のとり方によらない。

定理 20.7 コンパクトで向き付けを持つ連結 n 次元多様体 M に対し、$H^n_{DR}(M)\cong \boldsymbol{R}$ である。写像 $\Omega^n(M)\ni\alpha\longmapsto \displaystyle\int_M \alpha\in\boldsymbol{R}$ を対応させるは、0 でない準同型写像である。

証明 0 でない準同型写像であることは、微分 n 形式 α を向き付けを持つ座標近傍の 1 つ $(U,(x_1,\ldots,x_n))$ 上に台を持ち、0 でない非負の関数 f について $\alpha = f\,\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$ となるようにとれば、$\displaystyle\int_M \alpha>0$ となるからわかる。

連結多様体に対しては $\dim H^n_{DR}(M)$ は 0 または 1 であることを示す。

多様体の三角形分割を使うならば、K の $n-1$ 単体は、高々 2 つの n 単体の境界となっている。ただ 1 つの n 単体の境界になっていることと M の境界の点であることは同値である。$\dim H^n_{DR}(M) = \dim H_n(K)$ だから、連結多様体に対しては $\dim H_n(K)$ が 0 または 1 であることを示す。n サイクル $\sum a_i\sigma_i$ を考える。$\sum a_i\partial\sigma_i = 0$ であるとする。M は境界を持たないとする。1 つの $n-1$ 単体 τ は、2 つの σ_i, σ_j の境界であり、$a_i = a_j$ または $a_i = -a_j$ となっている。従って、隣り合う単体 σ_i, σ_j の係数 a_i, a_j は、等しいかまたは符号が異なる形で定まっている。すなわち、a_i の間には $n-1$ 単体の個数だけの関係式が定まる。これらの関係式の解 a_i は高々 1 次元である。なぜなら、0 でない解があれば、連結だから n 単体を順にたどることで 1 つの n 単体の係数を定めるとすべての n 単体の係数が定まるからである。

このほかに、連結なコンパクト多様体は、極大値がただ 1 つであるようなモース関数を持つことを使って示すこともできる。このとき、問題 14.6（39 ページ）の分解として、$N_{j-1}\cap B_j$ は空集合または m_j 次元 $(m_j < n-2)$ の球面 S^{m_j} と $n-m_j$ 次元開球体 B^{n-m_j} の直積 $B^{n-m_j}\times S^{m_j}$ と微分同相になる（$N_{k-1}\cap B_k$ だけが $B^1\times S^{n-1}$ と微分同相になる）ものが取れる。問題 14.6 の解に用いたマイヤー・ビエトリス完全列をみると、$\dim H^n_{DR}(M)$ は高々 1 次元であることがわかる。 ■

この証明から、M がコンパクト連結多様体で境界を持てば、$H_n(K)\cong 0$ となることがわかる。

いたるところ 0 にならない n 形式 ω が存在するすると、M は向き付け可能になる。実際 ${\varphi_i}^{-1*}\omega = f_i\,\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$ について、f_i は 0 にならない関数であるが、f_i が正になるような φ_i だけをあつめると、向き付けられた座標近傍系となる。

M が境界を持たないコンパクト連結多様体で、向き付け不可能のときには、$\int_M \alpha$ は定義されない。このとき、$H^n_{DR}(M)\cong H_n(K)\cong 0$ となっている。

命題 20.8 M を境界を持たない向き付け不可能なコンパクト連結多様体とする。このとき、$H^n_{DR}(M)\cong H_n(K)\cong 0$ となる。

証明　M の 2 重被覆 $\widehat{M}$ で、連結で向き付け可能なものがあり、$\varphi:\widehat{M}\longrightarrow\widehat{M}$ で、φ は固定点を持たず、$\varphi^2 = \mathrm{id}_{\widehat{M}}$ かつ $\widehat{M}/\varphi\cong M$ となるものがある。φ は $\widehat{M}$ の向きを反対にする。α を M 上の n 形式とし、$\pi:\widehat{M}\longrightarrow M$ について $\pi^*\alpha$ を考えると $\pi = \pi\circ\varphi$ だから $\varphi^*\pi^*\alpha = \pi^*\alpha$ であり、$\int_{\widehat{M}}\varphi^*\pi^*\alpha = \int_{\widehat{M}}\pi^*\alpha$ である。φ は向きを反対にする微分同相写像だから積分の定義から $\int_{\widehat{M}}\varphi^*\pi^*\alpha = -\int_{\widehat{M}}\pi^*\alpha$ であるから、$\int_{\widehat{M}}\pi^*\alpha = 0$ となる。従ってドラームの定理から、$\pi^*\alpha = \mathrm{d}\,\beta$ と書かれる。$\beta_1 = \dfrac{1}{2}(\beta+\varphi^*\beta)$ とすると、$\varphi^*\beta_1 = \beta_1$ だから $\beta_1 = \pi^*\beta_2$ と書かれる。

$$\begin{aligned}\pi^*(\mathrm{d}\,\beta_2) &= \mathrm{d}\,\pi^*\beta_2 = \mathrm{d}\,\beta_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(\beta+\varphi^*\beta)\\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{d}\,\beta+\varphi^*\,\mathrm{d}\,\beta) = \frac{1}{2}(\pi^*\alpha+\varphi^*\pi^*\alpha) = \pi^*\alpha\end{aligned}$$

だから、$\mathrm{d}\,\beta_2 = \alpha$ となる。 ■

定理 20.7 と命題 20.8 から次の命題が得られる。

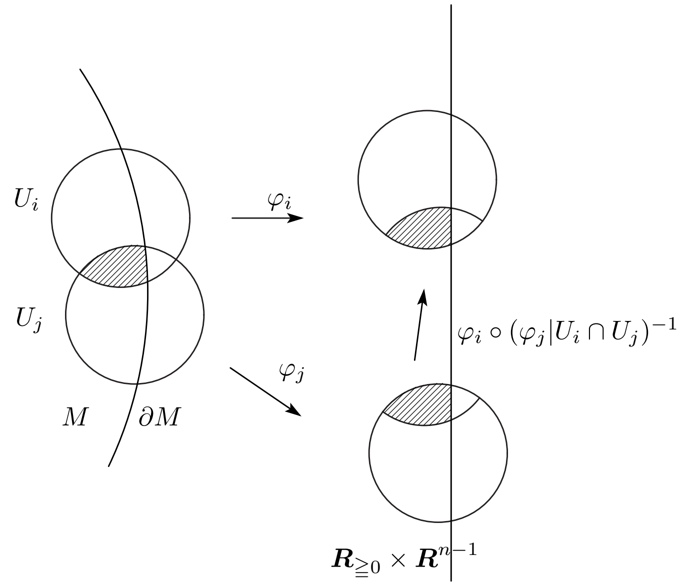

図 3: 境界を持つ多様体

命題 20.9 M を境界を持たない n 次元コンパクト連結多様体とする。このとき、$H^n_{DR}(M) \cong \begin{cases} \boldsymbol{R} \\ 0 \end{cases}$ であり、M が向き付け可能であることと $H^n_{DR}(M) \cong \boldsymbol{R}$ となることは同値である。

さて、向き付けられた多様体についてのストークスの定理を定式化するためにコンパクトな境界を持つ多様体を考えよう。

境界を持つ多様体は、多様体の定義 8.1 において、$\varphi_i : U_i \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ を $\varphi_i : U_i \longrightarrow \boldsymbol{R}_{\leqq 0} \times \boldsymbol{R}^{n-1}$ として得られる。ここで、$\boldsymbol{R}_{\leqq 0} = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \leqq 0\}$ である。φ_i の値域が $\{0\} \times \boldsymbol{R}^{n-1}$ と交わらない場合は、もともとの多様体の定義と変わらない。但し、境界を持つ多様体の座標変換 $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ (\varphi_j | U_i \cap U_j)^{-1}$ が C^∞ 級とは、$\varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \boldsymbol{R}_{\leqq 0} \times \boldsymbol{R}^{n-1} \subset \boldsymbol{R}^n$ の $\boldsymbol{R}^n$ における近傍からの C^∞ 級写像を $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ に制限したものになっていることである。

$\partial M = \bigcup \varphi_i{}^{-1}(\{0\} \times \boldsymbol{R}^{n-1}) \subset M$ とおくと、∂M は $n-1$ 次元多様体となる。∂M を M の境界と呼ぶ。

境界を持つ多様体 M の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ が、向き付けを定めているとき、$\varphi_i | (U_i \cap \partial M)$ は、像が $\boldsymbol{R}^{n-1} \cong \{0\} \times \boldsymbol{R}^{n-1}$ にある座標近傍系として、向き付けを定めている。これを、M の向き付けから定まる ∂M の向き付けと呼ぶ。

また、境界を持つ多様体上の C^r 級関数 f とは、$f \circ \varphi_i$ が $\varphi_i(U_i)$ の近傍における C^r 級関数の $\varphi_i(U_i)$ への制限となるもののことである。同様に境界を持つ多様体の間の C^r 写像が定義される。

定理 20.10 (ストークスの定理) 境界を持つコンパクトで向き付けられた n 次元多様体 M 上の微分 $n-1$ 形式 α に対し、$\displaystyle\int_M \mathrm{d}\,\alpha = \int_{\partial M} \alpha$ である。ただし、∂M には M の境界としての向き付けを与えている。

証明　M の座標近傍系による被覆の有限部分被覆をとり、それに従属する 1 の分割 λ_i をとる。

$$\int_M \mathrm{d}\,\alpha = \int_M \mathrm{d}\left(\sum \lambda_i \alpha\right) = \sum \int_M \mathrm{d}(\lambda_i \alpha)$$

と分解して、各 U_i に台を持つ $\alpha_i = \lambda_i \alpha$ に対して、$\displaystyle\int_M \mathrm{d}\,\alpha_i = \int_{\partial M} \alpha_i$ を示せば良い。また、${\varphi_i}^{-1*}\alpha_i$ の台は $\varphi_i(U_i)$ に含まれる直方体 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ に含まれるとしてよい。$\varphi_i(U_i) \cap (\{0\} \times \boldsymbol{R}^{n-1}) = \emptyset$ の場合、$\displaystyle\int_{\partial M} \alpha_i = 0$ となるが、${\varphi_i}^{-1*}\alpha_i$ を $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{k-1}, b_{k-1}] \times [a_{k+1}, b_{k+1}] \cdots \times [a_n, b_n]$ に制限したものは 0 だから、問題 5.9 （13 ページ）の結果により、$\displaystyle\int_M \mathrm{d}\,\alpha_i = \int_{{\varphi_i}^{-1}|[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]} \mathrm{d}\,\alpha_i = 0$ であり、等号が成立する。また、$\varphi_i(U_i) \cap (\{0\} \times \boldsymbol{R}^{n-1}) \neq \emptyset$ の場合、$a_1 < 0,\, b_1 = 0$ となっており、$k \geqq 1$ に対し、${\varphi_i}^{-1*}\alpha_i$ を $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{k-1}, b_{k-1}] \times [a_{k+1}, b_{k+1}] \cdots \times [a_n, b_n]$ に制限したものは 0 となる。従って、問題 5.9 の結果により、

$$\int_M \mathrm{d}\,\alpha_i = \int_{{\varphi_i}^{-1}|[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]} \mathrm{d}\,\alpha_i = \int_{{\varphi_i}^{-1}|\{0\}\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]} \alpha_i$$

であり、等号が成立する。 ■

【問題 20.11】 $\boldsymbol{R}^3$ 上の微分 2 形式 $\omega = x_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - x_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + x_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ を考える。

(1) 単位球面の埋め込み $\iota : S^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ について S^2 に $B^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \leqq 1\}$ の境界としての向きを入れる。$\displaystyle\int_{S^2} \iota^*\omega$ を計算せよ。

(2) 問題 14.3（37 ページ）(3) の $(\pi_S^{-1})^*(\omega|S^2)$ について、$\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^2} (\pi_S^{-1})^*(\omega|S^2)$ を計算せよ。

【問題 20.11 の解答】 (1)

$$\int_{S^2} \omega = \int_{\partial B^3} \omega = \int_{B^3} \mathrm{d}\,\omega = \int_{B^3} 3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = 4\pi$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{R}^2} (\pi_S^{-1})^*(\omega|S^2) &= \int_{\boldsymbol{R}^2} \frac{4\,\mathrm{d}u_1 \wedge \mathrm{d}u_2}{(1 + {u_1}^2 + {u_2}^2)^2} = \int_{\boldsymbol{R}^2} \frac{4\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2}{(1 + {u_1}^2 + {u_2}^2)^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{4r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{(1 + r^2)^2} = 4\pi\end{aligned}$$

【問題 20.12】 $T^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid (\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2} - 2)^2 + {x_3}^2 = 1\}$ に $H = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2} - 2)^2 + {x_3}^2 \leqq 1\}$ の境界としての向きを入れる。

(1) $\displaystyle\int_{T^2} x_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ を計算せよ。

(2) $\displaystyle\int_{T^2} \frac{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2} - 2}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}} (x_1\,\mathrm{d}\,x_2 - x_2\,\mathrm{d}\,x_1) \wedge \mathrm{d}\,x_3 + x_3\,\mathrm{d}\,x_1 \wedge \mathrm{d}\,x_2$ を計算せよ。

【問題 20.12 の解答】 (1)

$$\int_{T^2} x_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = \int_{\partial H} x_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = \int_H \mathrm{d}\,x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = 4\pi^2$$

(2)

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\Big(\frac{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2} - 2}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}} (x_1\,\mathrm{d}\,x_2 - x_2\,\mathrm{d}\,x_1) \wedge \mathrm{d}\,x_3 + x_3\,\mathrm{d}\,x_1 \wedge \mathrm{d}\,x_2\Big) \\ &= (-2)(-\frac{1}{2}) \frac{1}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}^{\,3}} (2x_1\,\mathrm{d}x_1 + 2x_2\,\mathrm{d}x_2)(x_1\,\mathrm{d}\,x_2 - x_2\,\mathrm{d}\,x_1) \wedge \mathrm{d}\,x_3 \\ &\quad + \frac{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2} - 2}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}} (2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3) \\ &\quad + \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ &= (3 - \frac{2}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}})\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{T^2} \frac{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}-2}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}}(x_1\,\mathrm{d}\,x_2 - x_2\,\mathrm{d}\,x_1)\wedge \mathrm{d}\,x_3 + x_3\,\mathrm{d}\,x_1\wedge \mathrm{d}\,x_2 \\
&= \int_H (3-\frac{2}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}})\,\mathrm{d}\,x_1\wedge \mathrm{d}x_2\wedge \mathrm{d}x_3 \\
&= \int_H (3-\frac{2}{r})r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,x_3 \\
&= \int_{-1}^1\int_0^{2\pi}\left[\frac{3}{2}r^2-2\right]_{2-\sqrt{1-{x_3}^2}}^{2-\sqrt{1+{x_3}^2}}\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,x_3 \\
&= 2\pi\int_{-1}^1 \frac{3}{2}\{(2-\sqrt{1-{x_3}^2})^2-(2-\sqrt{1+{x_3}^2})^2\} - 2\cdot 2\sqrt{1-{x_3}^2}\,\mathrm{d}\,x_3 \\
&= 2\pi\cdot 8\int_{-1}^1 \sqrt{1-{x_3}^2}\,\mathrm{d}\,x_3 = 8\pi^2
\end{aligned}
$$

これは次のように計算したものと一致する。

$$
\iota(u,v) = (\cos u(2+\cos v), \sin u(2+\cos v), \sin v)
$$

とおく。

$$
\begin{aligned}
&\iota^*(\frac{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}-2}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}}(x_1\,\mathrm{d}\,x_2\wedge \mathrm{d}\,x_3 - x_2\,\mathrm{d}\,x_1\wedge \mathrm{d}\,x_3) + x_3\,\mathrm{d}\,x_1\wedge \mathrm{d}\,x_2) \\
&= \cos u\cos v\,\mathrm{d}(\sin u(2+\cos v))\wedge \mathrm{d}\sin v - \sin u\cos v\,\mathrm{d}(\cos u(2+\cos v))\wedge \mathrm{d}\sin v \\
&\quad + \sin v\,\mathrm{d}(\cos u(2+\cos v))\wedge \mathrm{d}(\sin u(2+\cos v)) \\
&= \cos u\cos v(2+\cos v)\,\mathrm{d}\sin u\wedge \mathrm{d}\sin v - \sin u\cos v(2+\cos v)\,\mathrm{d}\cos u\wedge \mathrm{d}\sin v \\
&\quad + \sin v\sin u(2+\cos v)\,\mathrm{d}\cos u\wedge \mathrm{d}\cos v + \sin v\cos u(2+\cos v)\,\mathrm{d}\cos v\wedge \mathrm{d}\sin u \\
&= (\cos u)^2(\cos v)^2(2+\cos v)\,\mathrm{d}\,u\wedge \mathrm{d}\,v + (\sin u)^2(\cos v)^2(2+\cos v)\,\mathrm{d}\,u\wedge \mathrm{d}\,v \\
&\quad + (\sin v)^2(\sin u)^2(2+\cos v)\,\mathrm{d}\,u\wedge \mathrm{d}\,v + (\sin v)^2(\cos u)^2(2+\cos v)\,\mathrm{d}\,u\wedge \mathrm{d}\,v \\
&= (2+\cos v)\,\mathrm{d}\,u\wedge \mathrm{d}\,v
\end{aligned}
$$

この積分も、もちろん $8\pi^2$ になる。

21　写像度

向き付けをもつコンパクト n 次元多様体 M_1, M_2 の間の写像 $F : M_1 \longrightarrow M_2$ と M_2 上の n 形式 α に対して、$\displaystyle\int_{M_1} F^*\alpha$ と $\displaystyle\int_{M_2}\alpha$ の値を考えてみよう。

$F : M_1 \longrightarrow M_2$ の臨界値の集合 C は測度 0 である。M_1 はコンパクトとしたので臨界点の集合は M_1 のコンパクト部分集合で、臨界値の集合は、測度 0 のコンパクト集合となる。$M_2 \setminus C$ は空でない開集合である。$M_2 \setminus C$ の点 y に対し、$F^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ とする。逆写像定理により、F は $x_1, \ldots, x_k$ の近傍 $U_1, \ldots, U_k$ から y の近傍 V への微分同相写像である。$F(M \setminus \displaystyle\bigcup_{i=1}^k U_i)$ は M_2 のコンパクト集合で、y を含まない。従って開集合 $M_2 \setminus F(M \setminus \displaystyle\bigcup_{i=1}^k U_i)$ の中に y の座標近傍 $W \subset V$ をとることができる。

W に台を持つ α で積分 $\displaystyle\int_{M_2}\alpha$ が正のものをとる。$F^*\alpha$ は $F^{-1}(W)$ に台をもつ n 形式である。$F^{-1}(W) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^k (F^{-1}(W)\cup U_i)$ で、$F|F^{-1}(W)\cup U_i$ は微分同相写像であるから、

$$
\int_{F^{-1}(W)\cup U_i} (F^*\alpha)|F^{-1}(W)\cup U_i = \pm\int_W \alpha|W
$$

となる。従ってある整数 m が存在し、$\displaystyle\int_{M_1} F^*\alpha = m\int_{M_2}\alpha$ が成立する。

$[\alpha]$ は $H^n_{DR}(M_2)$ の生成元であり、$F^* : H^n_{DR}(M_2) \longrightarrow H^n_{DR}(M_1)$ は $\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ の準同型だから、M_2 上の任意の n 形式 α に対し、$\displaystyle\int_{M_1} F^*\alpha = m\int_{M_2}\alpha$ が成立する。

定義 21.1 向き付けをもつコンパクト n 次元多様体 M_1, M_2 の間の写像 $F : M_1 \longrightarrow M_2$ と M_2 上の n 形式 α に対して、$\displaystyle\int_{M_1} F^*\alpha = m \int_{M_2} \alpha$ となる整数 m を F の写像度と呼ぶ。

【問題 21.2】 $z \in \boldsymbol{C}$ に対し、$P_0(z) = z^n$ とし、$P(z)$ を z についての n 次多項式とする。1次元複素射影空間 $\boldsymbol{C}P^1$ からそれ自身への写像 $f : \boldsymbol{C}P^1 \longrightarrow \boldsymbol{C}P^1$ を

$$f([z:1]) = [P(z):1], \quad f([1:0]) = [1:0]$$

で定める。f_0 を P_0 を用いて同様に定める。

(1) f は C^∞ 級写像であることを示せ。

(2) C^∞ 級写像 $F : \boldsymbol{C}P^1 \times [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{C}P^1$ で $F|\boldsymbol{C}P^1 \times \{0\} = f_0$, $F|\boldsymbol{C}P^1 \times \{1\} = f_1$ を満たすものが存在することを示せ。

(3) $f^* = f_0^* : H^2_{DR}(\boldsymbol{C}P^1) \longrightarrow H^2_{DR}(\boldsymbol{C}P^1)$ を示せ。

(4) 2 次微分形式に積分を対応させる写像は $I : H^2_{DR}(\boldsymbol{C}P^1) \cong \boldsymbol{R}$ を導く。このとき、$f_0^* : H^2_{DR}(\boldsymbol{C}P^1) \longrightarrow H^2_{DR}(\boldsymbol{C}P^1)$ を求めよ。

(5) もしも $P(z) = 0$ となる点 z が存在しなければ、f は ∞ に値を持つ 定値写像とホモトピックになり $f^* = 0$ となることを示せ。

22 ガウス写像

M を向き付け可能な曲面（2次元多様体）とし、M の $\boldsymbol{R}^3$ への埋め込み（または、はめ込み）ι が与えられているとする。M の各点 p に対し、$\boldsymbol{n}(p)$ を $\iota(M)$ の単位法ベクトルとする。すなわち、$\boldsymbol{n}(p) \in T_{\iota(p)}\boldsymbol{R}^3$ は $\iota_*(T_pM) \subset T_{\iota(p)}\boldsymbol{R}^3$ に直交し、$\|\boldsymbol{n}(p)\| = 1$ とする。$\boldsymbol{n}(p)$ は p について連続にとられているとする。写像 $T_{i(p)}\boldsymbol{R}^3$ と $\boldsymbol{R}^3$ を同一視して得られる写像 $\boldsymbol{n} : M \longrightarrow S^2$ をガウス写像という。

【問題 22.1】 $T^2 = \{(\cos u(1+\cos v), \sin u(1+\cos v), \sin v) \in \boldsymbol{R}^3 \mid u,\ v \in \boldsymbol{R}\}$ とする。

(1) $\boldsymbol{n}(u,v)$ を求めよ。

(2) $\omega = x_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - x_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + x_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ に対し、$\displaystyle\int_{T^2} \boldsymbol{n}^*\omega$ を計算せよ。

【問題 22.1 の解答】 (1) $\dfrac{\partial}{\partial u}$ の像は $-\sin u(2+\cos v)\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \cos u(2+\cos v)\dfrac{\partial}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial}{\partial v}$ の像は $-\cos u \sin v\dfrac{\partial}{\partial x_1} - \sin u \sin v\dfrac{\partial}{\partial x_2} + \cos v\dfrac{\partial}{\partial x_3}$ である。
$\boldsymbol{n}$ は、$\cos u \cos v\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \sin u \cos v\dfrac{\partial}{\partial x_2} + \sin v\dfrac{\partial}{\partial x_3}$ となる。

(2) $\boldsymbol{n} : T^2 \longrightarrow S^2$ は $\boldsymbol{n}(u,v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$ と書かれる。

【問題 22.2】 (1) 向き付けられた連結閉多様体 M の $\boldsymbol{R}^3$ への埋め込み（または、はめ込み）の連続な族 ι_t に対し、$\vec{n}_t : M \longrightarrow S^2$ をそれ付随するガウス写像とする. $\displaystyle\int_M \vec{n}_t{}^*\omega$ は 4π の倍数であることを示せ。

(2) 向き付けられた連結閉多様体 M の $\boldsymbol{R}^3$ への埋め込み（または、はめ込み）ι に対し, 定義されるガウス写像 $\vec{n}$ に対し、$(0,0,\pm 1)$ が正則値であるとする。M 上の関数 x_3 は M 上のモース関数であることを示せ。

(3) ガウス写像 $\vec{n}$ の写像度の絶対値は x_3 についての（極大値の個数＋極小値の個数−鞍点の個数）の絶対値と一致することを示せ。

ヒント：$\overrightarrow{n}^{-1}(\pm1,0,0)$ の点の近傍で、M は $\{(x_1,x_2,x_3(x_1,x_2))\}$ の形に書かれる。これに対し、

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{n}(x_1,x_2)\\ &=\left(-\frac{\frac{\partial x_3}{\partial x_1}}{\sqrt{1+(\frac{\partial x_3}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial x_3}{\partial x_2})^2}},-\frac{\frac{\partial x_3}{\partial x_2}}{\sqrt{1+(\frac{\partial x_3}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial x_3}{\partial x_2})^2}},\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial x_3}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial x_3}{\partial x_2})^2}}\right)\end{aligned}$$

$(\pm1,0,0)$ の近傍における S^2 の座標関数を $(x_1,x_2,x_3)\longmapsto(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3})$ とすると $\overrightarrow{n}(x_1,x_2)=(\frac{\partial x_3}{\partial x_1},\frac{\partial x_3}{\partial x_2})$ であるから、ヤコビ行列は $\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 x_3}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial {x_2}^2}\end{pmatrix}$ となる。