

し点 $(s, t) = (\sigma(x, y), \tau(x, y))$ を対応させることが出来、点 (s, t) に対し点 $(x, y) = (\xi(s, t), \eta(s, t))$ を対応させることが出来る必要がある。1 点に対し、1 点を定める対応を写像と呼んでいる。この言葉では、写像 $(\sigma(x, y), \tau(x, y))$ に対し、逆向きの写像 $(\xi(s, t), \eta(s, t))$ が存在するということである。これらの写像を $(x, y) \mapsto (s, t) = (\sigma(x, y), \tau(x, y)), (s, t) \mapsto (x, y) = (\xi(s, t), \eta(s, t))$ のように書く。

微分係数を見てそれがパラメータの書き換えになりうるかの情報を得ることが出来る。

平面の点 (x, y) に対し、平面の点 $(s, t) = (\sigma(x, y), \tau(x, y))$ を対応させる写像を考える。 $\sigma(x, y), \tau(x, y)$ とともに連続微分可能とする。点 (x, y) における偏微分から作ったヤコビ行列 $\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} & \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} & \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{pmatrix}$ について、第 1 列 $\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} \end{pmatrix}$ は y を固定し x を変化させたときの曲線 $(\sigma(x, y), \tau(x, y))$ の接ベクトルである。また、第 2 列 $\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{pmatrix}$ は x を固定し y を変化させたときの曲線 $(\sigma(x, y), \tau(x, y))$ の接ベクトルである。点 $(x + h, y + k)$ は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma(x + h, y + k) \\ \tau(x + h, y + k) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sigma(x, y) \\ \tau(x, y) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1(x, y, h, k) \\ \varepsilon_2(x, y, h, k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma(x, y) \\ \tau(x, y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} & \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} & \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1(x, y, h, k) \\ \varepsilon_2(x, y, h, k) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

のように写像される。もしも $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} & \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} & \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{pmatrix} \neq 0$ ならば、 xy 座標における

小さな長方形 $[x, x + h] \times [y, y + k]$ は、 $\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{pmatrix}$ に平行な辺を持つ平行四辺形に近い図形に写される。行列式が 0 にならないことはこの平行四辺形が線分や点に退化しないことを保証している。そうすると、局所的にはほぼ 1 次変換のように写像されるのであるから、局所的に 1 対 1 になっていることが予想される。

これは逆写像定理として次のように定式化される。

定理 8.1 (逆写像定理). 平面の点 (x, y) に対し、平面の点 $(\sigma(x, y), \tau(x, y))$ を対応させる写像について、 $\sigma(x, y), \tau(x, y)$ とともに連続微分可能、 (x_0, y_0) において $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} & \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} & \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{pmatrix} \neq 0$ とする。このとき $(s_0, t_0) = (\sigma(x_0, y_0), \tau(x_0, y_0))$ の近傍で定義された (x_0, y_0) の近傍に値を持つ写像 $(\xi(s, t), \eta(s, t))$ で、

$$\begin{aligned} (\xi(\sigma(x, y), \tau(x, y)), \eta(\sigma(x, y), \tau(x, y))) &= (x, y) \\ (\sigma(\xi(s, t), \eta(s, t)), \tau(\xi(s, t), \eta(s, t))) &= (s, t) \end{aligned}$$

を満たすものが存在する。 $\xi(s, t), \eta(s, t)$ は連続微分可能である。

8.2 逆写像定理の証明 (5 / 2 0)

逆写像定理の証明の第一歩は、行列で表される線形写像について正しいことを確認することである。

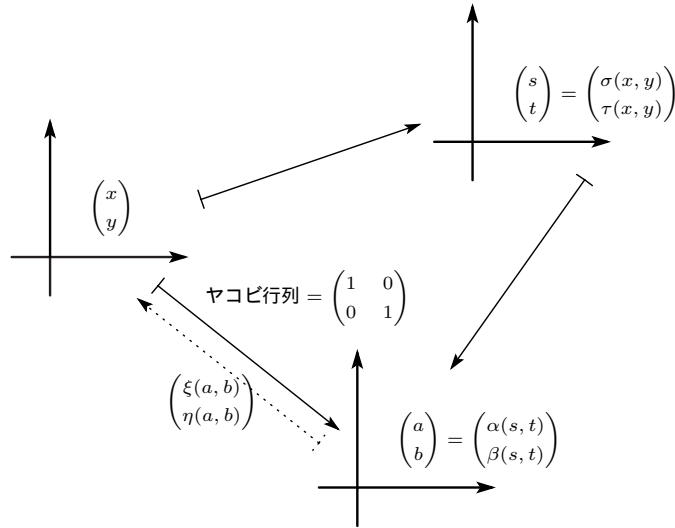


図 8.1 逆写像定理をヤコビ行列が単位行列のときに示せばよい。

線形写像 $\begin{pmatrix} \sigma(x, y) \\ \tau(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ についてはヤコビ行列は $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ である。この行列式 $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ が 0 でなければ逆行列 $\frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$ が存在し、 $\begin{pmatrix} \xi(s, t) \\ \eta(s, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ とおけば、求める式が成立する。

また、 xy 座標系も st 座標系も平行移動して $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(s_0, t_0) = (0, 0)$ として議論すればよいことは、平行移動してもヤコビ行列は変わらないことからわかる。

次にいわゆるチェインルールと呼ばれる合成関数の微分法に注意しよう。これは $(x, y) \mapsto (\sigma(x, y), \tau(x, y))$, $(s, t) \mapsto (\alpha(s, t), \beta(s, t))$ の合成

$$(x, y) \mapsto (\alpha(\sigma(x, y), \tau(x, y)), \beta(\sigma(x, y), \tau(x, y)))$$

に対して、そのヤコビ行列が

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial s} & \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\ \frac{\partial \beta}{\partial s} & \frac{\partial \beta}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} & \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} & \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{pmatrix}$$

とヤコビ行列の積となるというものである。最初の行列は $(\sigma(x, y), \tau(x, y))$ における値であり、2 番目の行列は (x, y) における値である。写像の 1 次近似は 1 次変換のごとくふるまい、写像の合成の 1 次近似は (定数項をのぞいて) 1 次変換の合成となるということである。一度は微分して確かめてみるのがよいが、ここではその計算は省くことにする。

さて、与えられた $(\sigma(x, y), \tau(x, y))$ の $(x_0, y_0) = (0, 0)$ におけるヤコビ行列 $\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} & \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} & \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{pmatrix}$ に対し、このヤコビ行列の逆行列を取り、それを $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ とする。 $\begin{pmatrix} \alpha(s, t) \\ \beta(s, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ として、写像の合成

$$(\alpha(\sigma(x, y), \tau(x, y)), \beta(\sigma(x, y), \tau(x, y)))$$

の $(0, 0)$ におけるヤコビ行列を計算すると、チェインルールから単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

となることがわかる。図 8.1 参照。逆写像定理がヤコビ行列が単位行列となるときに成立していれば、 $(\xi(a, b), \eta(a, b))$ で

$$\begin{pmatrix} \alpha(\sigma(\xi(a, b), \eta(a, b)), \tau(\xi(a, b), \eta(a, b))) \\ \beta(\sigma(\xi(a, b), \eta(a, b)), \tau(\xi(a, b), \eta(a, b))) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi(\alpha(\sigma(x, y), \tau(x, y)), \beta(\sigma(x, y), \tau(x, y))) \\ \eta(\alpha(\sigma(x, y), \tau(x, y)), \beta(\sigma(x, y), \tau(x, y))) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となるものが出来る。このとき、

$$(s, t) \mapsto (\xi(\alpha(s, t), \beta(s, t)), \eta(\alpha(s, t), \beta(s, t)))$$

が求める写像である。

従って、ヤコビ行列が単位行列のときの逆写像定理 (定理 8.3) を示せば、逆写像定理 8.1 は示されることがわかった。

問 8.2. チェインルールにより定理 8.1 で与えられる $(\xi(s, t), \eta(s, t))$ のヤコビ行列を求めよ。

8.3 特別な場合の逆写像定理 (5 / 2 0)

定理 8.3 (ヤコビ行列が単位行列のときの逆写像定理). 平面の点 (x, y) に対し、平面の点 $(\sigma(x, y), \tau(x, y))$ を対応させる写像について、 $\sigma(x, y), \tau(x, y)$ は連続微分可能、 $(0, 0)$ において

$$(\sigma(0, 0), \tau(0, 0)) = (0, 0), \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} & \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} & \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。このとき $(0, 0)$ の近傍で定義された $(0, 0)$ の近傍に値を持つ写像 $(\xi(s, t), \eta(s, t))$ で、

$$\begin{aligned} (\xi(\sigma(x, y), \tau(x, y)), \eta(\sigma(x, y), \tau(x, y))) &= (x, y), \\ (\sigma(\xi(s, t), \eta(s, t)), \tau(\xi(s, t), \eta(s, t))) &= (s, t) \end{aligned}$$

を満たすものが存在する。

証明は 2 通り考えられる。一方は 1 変数の逆関数定理から導くものである。他方は縮小写像の方法と呼ばれるものである。

ともに $(\sigma(x, y), \tau(x, y))$ は (x, y) に非常に近いことを念頭に考える。

8.4 証明 1 (5 / 2 0)

1 変数の逆関数定理は、 x_0 において連続微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(x_0) \neq 0$ を満たすとき、 $f(x)$ は x_0 の近傍で単調増加あるいは単調減少であるから、 $f(x_0)$ の近傍で定義された関数 $g(y)$ で、 $f(x_0)$ の近傍で $f(g(y)) = y$ 、 x_0 の近傍で $g(f(x)) = x$ となるものがあるというものである。このような $g(y)$ を $f(x)$ の逆関数と呼んだのである。 $y = f(x)$ のグラフ $\{(x, f(x))\}$ が y 軸から描いた $x = g(y)$ のグラフ $\{(g(y), y)\}$ と一致している。(変数 x, y を入れ替えると 45° の傾きの直線に対してグラフが対称である。)

まず、 $(x, y) \mapsto (\sigma(x, y), \tau(x, y))$ を

$$(x, y) \mapsto (\sigma(x, y), y) \mapsto (\sigma(x, y), \tau(x, y))$$

というように分解して考える。図 8.2 参照。 $\sigma(x, y)$ について、 $(0, 0)$ の近傍で

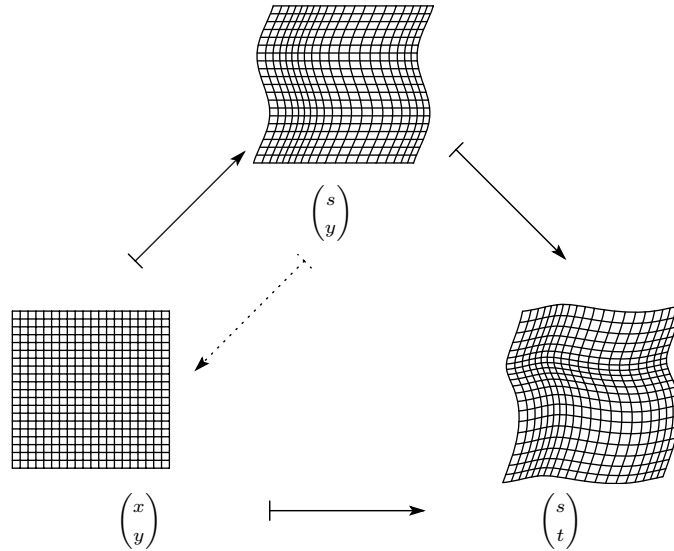


図 8.2 一方の変数についての逆関数をつかう。

は、 $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y)$ は 1 に近く、正の値をとるから、 x と $s = \sigma(x, y)$ の対応と見て、逆関数 $\xi_0(s, y)$ で、 $x = \xi_0(\sigma(x, y), y)$, $s = \sigma(\xi_0(s, y), y)$ となるものが存在する。(従って、写像 $(x, y) \mapsto (\sigma(x, y), y)$ の逆写像は $(s, y) \mapsto (\xi_0(s, y), y)$ である。) この $\xi_0(s, y)$ は、 y の関数として $\sigma(x, y) = s$ の定める陰関数だから、定理 6.1 (23 ページ、証明は定理 7.1、25 ページ) により、 y について連続微分可能である。

さて、 $(\sigma(x, y), y) \mapsto (\sigma(x, y), \tau(x, y))$ を写像として表すと、

$$(s, y) \mapsto (s, \tau(\xi_0(s, y), y))$$

となる。第 2 成分を y で偏微分すると

$$\frac{\partial \tau(\xi_0(s, y), y)}{\partial y} = \frac{\partial \tau}{\partial x}(\xi_0(s, y), y) \frac{\partial \xi_0}{\partial y}(s, y) + \frac{\partial \tau}{\partial y}(\xi_0(s, y), y)$$

を得る。 $\frac{\partial \tau}{\partial x}(\xi_0(s, y), y)$ は、 $(s, y) = (0, 0)$ においては 0 であり、

$\frac{\partial \tau}{\partial y}(\xi_0(s, y), y) = 1$ である。よって、 $(0, 0)$ の近傍で $\frac{\partial \tau(\xi_0(s, y), y)}{\partial y}$ は 1 に近く、正の値をとる。従って、 $y \mapsto \tau(\xi_0(s, y), y)$ の逆関数 $\eta_0(s, t)$ で、 $t = \tau(\xi_0(s, \eta_0(s, t)), \eta_0(s, t))$, $y = \eta_0(s, \tau(\xi_0(s, y), y))$ を満たすものが存在する。すなわち、 $(s, y) \mapsto (s, \tau(\xi_0(s, y), y))$ の逆関数は $(s, t) \mapsto (s, \eta_0(s, t))$ となる。

2 つの逆関数を合成すると

$$(s, t) \mapsto (s, \eta_0(s, t)) \mapsto (\xi_0(s, \eta_0(s, t)), \eta_0(s, t))$$

となるから、 $\xi(s, t) = \xi_0(s, \eta_0(s, t))$, $\eta(s, t) = \eta_0(s, t)$ とおけば、これが求める逆写像となる。

問 8.4. このようにして得られた $\xi(s, t)$, $\eta(s, t)$ が連続微分可能であることを示せ。

8.5 証明 2 (5 / 27)

逐次近似の方法あるいは縮小写像の方法というものを説明する。

ベクトルの記法で書こう。 $\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{F}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} \sigma(x, y) \\ \tau(x, y) \end{pmatrix}$ において、写像を

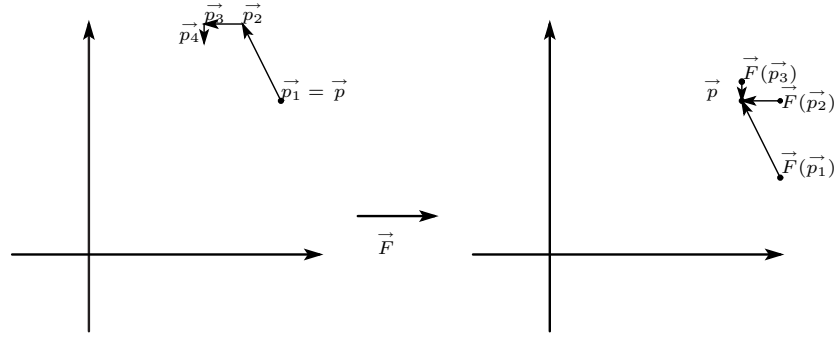


図 8.3 候補を像を見ながら変えていくと候補の列が得られる.

$\vec{q} \mapsto \vec{F}(\vec{q})$ と書くことにする。写像 \vec{F} の \vec{q} におけるヤコビ行列 $\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} & \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} & \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{pmatrix}$ を $J(\vec{F})$ あるいは $J(\vec{F})_{(\vec{q})}$ と書くことにする。

定理の仮定の、 $\vec{0}$ において $J(\vec{F})_{(\vec{0})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることと \vec{F} の成分

$\sigma(x, y), \tau(x, y)$ は連続微分可能であることを $\vec{F}(\vec{q})$ と \vec{q} とは余り離れていないことと理解する。点 \vec{p} をとり、 \vec{p} に写る点として、まず最初の候補として $\vec{p}_1 = \vec{p}$ をとってみる。ところが通常 $\vec{F}(\vec{p}_1)$ は \vec{p} と少しずれているであろう。 \vec{F} は大体恒等写像のようであると考えて、ずれた位置の差だけ \vec{p}_1 を補正する。すなわち $\vec{p}_2 = \vec{p}_1 - (\vec{F}(\vec{p}_1) - \vec{p})$ を次の候補とする。 $\vec{F}(\vec{p}_1)$ は \vec{p} と、おそらくまだ、わずかにずれているだろう。再び、その差で補正して、 $\vec{p}_3 = \vec{p}_2 - (\vec{F}(\vec{p}_2) - \vec{p})$ をその次の候補者とする。こうしていくと、候補のベクトルの列がとれるが、 $\|\vec{p}_2 - \vec{p}_1\|, \|\vec{p}_3 - \vec{p}_2\|, \dots$ は急速に減少し、ベクトルの列が収束することがわかる。

ここで、 $\vec{F}(\vec{0}) = \vec{0}$ となっており、 $\vec{p}_1 = \vec{0} - (\vec{F}(\vec{0}) - \vec{p})$ であるので、 $\vec{p}_0 = \vec{0}$ とおく。

まず、 $\vec{H}(\vec{q}) = \vec{q} - \vec{F}(\vec{q})$ において、そのヤコビ行列について考えると、 $J(\vec{H}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - J(\vec{F})$ は $\vec{0}$ において零行列であり、偏微分の連続性から、 $\vec{0}$ のある δ 近傍において $J(\vec{H})$ の各成分の絶対値が正実数 ε より小さい。 $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$ とする。

ここで準備として、偏微分の評価からの関数の評価の与え方は次のようであったことを思い出そう。

2変数関数 $f(x, y)$ について、

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \{f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))\} dt \\ &= \left\{ \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) dt \right\} (x - x_0) \\ &\quad + \left\{ \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) dt \right\} (y - y_0) \end{aligned}$$

である。従って、 $|\frac{\partial f}{\partial x}| \leq \varepsilon, |\frac{\partial f}{\partial y}| \leq \varepsilon$ ならば

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon(|x - x_0| + |y - y_0|) \leq \varepsilon\sqrt{2}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

となる。

$\vec{0}$ の δ 近傍において $J(\vec{H})$ の各成分の絶対値が ε より小であることから、 $\vec{H}(\vec{q}_2) - \vec{H}(\vec{q}_1)$ の各成分は $\varepsilon\sqrt{2}\|\vec{q}_2 - \vec{q}_1\|$ より小である。従って、

$$\|\vec{H}(\vec{q}_2) - \vec{H}(\vec{q}_1)\| \leq 2\varepsilon \|\vec{q}_2 - \vec{q}_1\|$$

となる。

こうして、2つの候補のベクトル \vec{p}_k, \vec{p}_{k+1} ($k \geq 1$) について、 $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$ だから、

$$\begin{aligned} \|\vec{p}_{k+1} - \vec{p}_k\| &= \|\vec{p}_k - \vec{F}(\vec{p}_k) - (\vec{p}_{k-1} - \vec{F}(\vec{p}_{k-1}))\| \\ &= \|\vec{H}(\vec{p}_k) - \vec{H}(\vec{p}_{k-1})\| \leq \frac{1}{2} \|\vec{p}_k - \vec{p}_{k-1}\| \end{aligned}$$

となる。この結果、 $\|\vec{p}_{k+1} - \vec{p}_k\| \leq \frac{1}{2^k} \|\vec{p}_1 - \vec{p}_0\| = \frac{1}{2^k} \|\vec{p}\|$ を得る。 $(\vec{p}_0 = \vec{0}$ としていた。)ここでは、実は少し注意が必要である。 \vec{H} のリプシッツ評価式は $\vec{0}$ の δ 近傍で成立しているので、候補のベクトル \vec{p}_k が δ 近傍内にとどまることを保証しなければいけない。ここでは、もとの $\vec{p} = \vec{p}_1$ が $\vec{0}$ の $\frac{\delta}{2}$ 近傍に

あるとすると $\vec{p}_{j+1} = \sum_{k=0}^j (\vec{p}_{k+1} - \vec{p}_k)$ について、

$$\|\vec{p}_{j+1}\| \leq \sum_{k=0}^j \|\vec{p}_{k+1} - \vec{p}_k\| \leq \sum_{k=0}^j \frac{1}{2^k} \|\vec{p}\| < 2\|\vec{p}\| \leq \delta$$

となつて、 \vec{p}_k は $\vec{0}$ の δ 近傍にあり、 \vec{H} のリプシッツ評価式が成立している。

こうして点列 \vec{p}_k は収束する。その収束先を \vec{q} とすると

$$\vec{q} = \vec{q} - (\vec{F}(\vec{q}) - \vec{p})$$

を満たし、 $\vec{F}(\vec{q}) = \vec{p}$ がいえる。

このような q はただ1つに定まることが、次の式変形からわかる。

$$\vec{F}(\vec{q}_1) = \vec{p}_1, \quad \vec{F}(\vec{q}_2) = \vec{p}_2$$

とすると、

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{q}_1) - \vec{F}(\vec{q}_2) &= \vec{q}_1 + (\vec{F}(\vec{q}_1) - \vec{q}_1) - (\vec{q}_2 + (\vec{F}(\vec{q}_2) - \vec{q}_2)) \\ &= \vec{q}_1 - \vec{H}(\vec{q}_1) - (\vec{q}_2 - \vec{H}(\vec{q}_2)) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \|\vec{F}(\vec{q}_1) - \vec{F}(\vec{q}_2)\| &\geq \|\vec{q}_1 - \vec{q}_2\| - \|\vec{H}(\vec{q}_1) - \vec{H}(\vec{q}_2)\| \\ &\geq \|\vec{q}_1 - \vec{q}_2\| - \frac{1}{2} \|\vec{q}_1 - \vec{q}_2\| \geq \frac{1}{2} \|\vec{q}_1 - \vec{q}_2\| \end{aligned}$$

従つて、 $\|\vec{q}_1 - \vec{q}_2\| \leq 2\|\vec{p}_1 - \vec{p}_2\|$ 。この式から、もしも、 $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$ ならば $\vec{q}_1 = \vec{q}_2$ である。

そこで、写像 \vec{G} を $\vec{q} = \vec{G}(\vec{p})$ と定義する。そうすると、すぐ上の不等式は逆関数 \vec{G} がリプシッツ連続であることを示している。

このリプシッツ連続性から \vec{G} が連続微分可能であることもすぐにわかる。すなわち、 \vec{F} が微分可能であることは次のように書かれる。

$$\vec{F}(\vec{q}_2) - \vec{F}(\vec{q}_1) = (J(\vec{F})_{(\vec{q}_1)})(\vec{q}_2 - \vec{q}_1) + \vec{\varepsilon}(\vec{q}_2, \vec{q}_1)$$

ここで、 $\lim_{\vec{q}_2 \rightarrow \vec{q}_1} \frac{\|\vec{\varepsilon}(\vec{q}_2, \vec{q}_1)\|}{\|\vec{q}_2 - \vec{q}_1\|} = 0$ である。考えている領域で $J(\vec{F})_{(\vec{q}_1)}$ は単位行列に近いから逆行列 $(J(\vec{F})_{(\vec{q}_1)})^{-1}$ をもち、この行列の成分は $J(\vec{F})_{(\vec{q}_1)}$ の成分の分数式で \vec{q}_1 に対し連続に変化する。上の式は \vec{p}_1, \vec{p}_2 で書き直すと

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = (J(\vec{F})_{(\vec{G}(\vec{p}_1))})(\vec{G}(\vec{p}_2) - \vec{G}(\vec{p}_1)) + \vec{\varepsilon}(\vec{G}(\vec{p}_2), \vec{G}(\vec{p}_1))$$