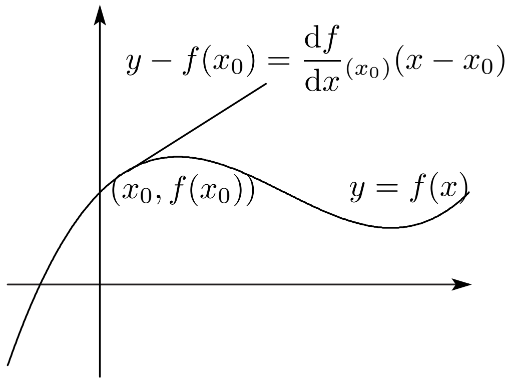
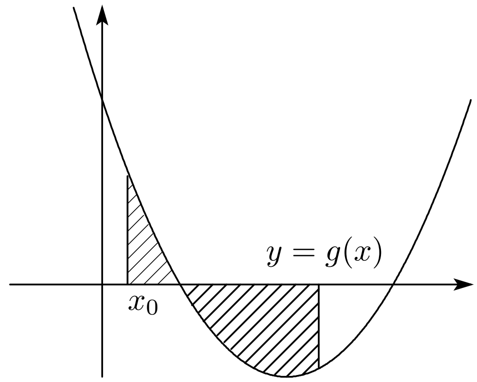
1. 微分と微分方程式

1.1. 関数の微分とグラフの傾き. $y = f(x)$ のグラフを考える。グラフ上の点 $(x_0, f(x_0))$ におけるグラフの傾きは、$f(x)$ の x_0 における微分 $f'(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ で与えられる。

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$





1.2. 積分. 導関数 $g(x)$ が与えられたとき、$f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = g(x)$ となる $f(x)$ は、$f(x) = f(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} g(x)\mathrm{d}x$ で与えられる。

$f(x_0)$ が指定されていなければ、積分定数の差を除いて $f(x)$ は定まる。

1.3. 微分方程式とは何か. 関数の微分が関数自体 (の値) に依存する関係を表すものが微分方程式である。

例

以下では、変数を明示した書き方を使う。

放射性物質の崩壊：$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -ku.$

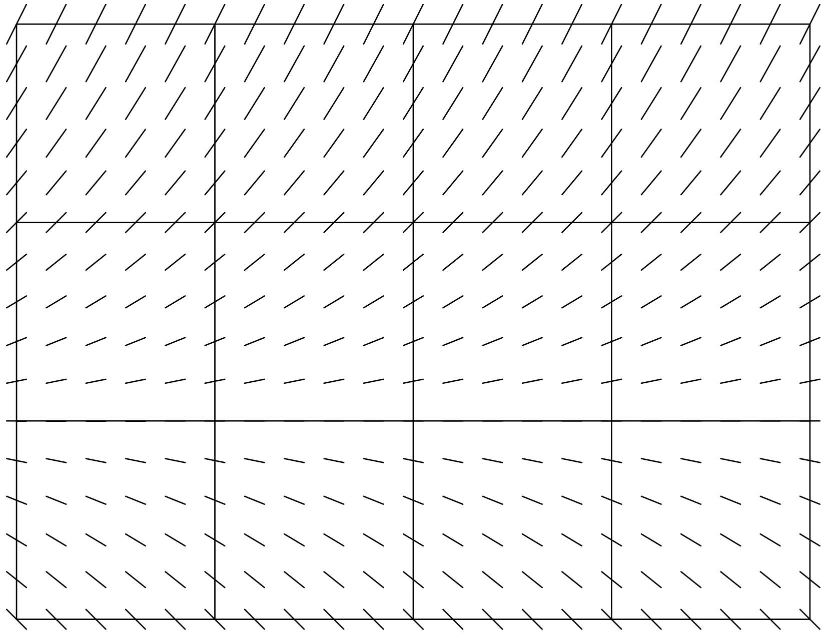
ロジスティック方程式： $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (a - bu)u.$

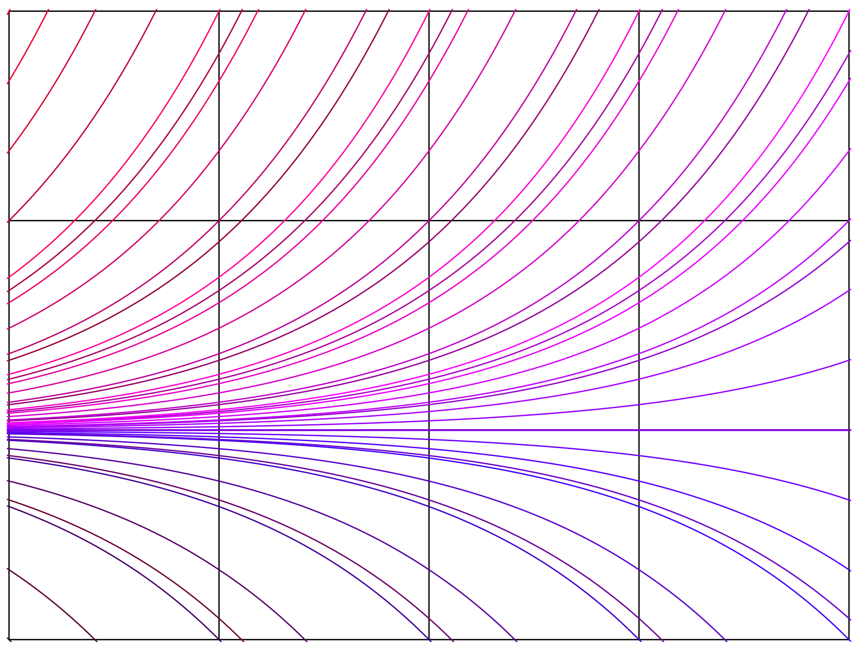
単振動の方程式：$m\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = -ku.$

これらの式の意味を考えてみると良い。微分方程式が関数の変化の様子をより良く記述する場合も多い（ニュートンの運動方程式などが最も良い例である)。

上の関係式を満たす関数

最初の２つの例では xu 平面上の各点 (x, u) に傾きが与えられている。この例では u だけの関数。傾きを与える曲線が u のグラフとなる。$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -ku$ ならば、後で見るように $u(t) = e^{-kt}u_0$ となる。





最後のものは、位置 u, 速度 $v = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ が状態を表し、$m = k = 1$ ならば、方程式は、$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = -u$ である。u, v を用いると、$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ における微分 (変化率) は $\begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix}$. この変化率を実現する運動が、$u$ の軌道となる。uv 平面上の円となる。$m = k = 1$ ならば、$u = K\sin(t - t_0)$, $v = K\cos(t - t_0)$.

1.4. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x$ **の解き方.**

(0) 答えを知って当てはめる。$x = x_0e^t$.

(1) 変数分離。
$\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1$ だから $\displaystyle\int\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int 1\mathrm{d}t.$
故に、$\log|x|=t+c$, すなわち $x=Ce^t$.

(2) 折れ線近似。
0 で値が x_0, $[0,t]$ で、傾きが x_0 ならば、x_0+tx_0.
0 で値が x_0, $[0,\frac{t}{2}]$ で、傾きが x_0 ならば、$\frac{t}{2}$ での値は $x_0+\frac{t}{2}x_0$,
$[\frac{t}{2},t]$ での傾きは $x_0+\frac{t}{2}x_0$ として、t での値は
$x_0+\frac{t}{2}x_0+\frac{t}{2}(x_0+\frac{t}{2}x_0)=x_0(1+\frac{t}{2})^2.$
同様に 3 分割のときは、t での値は、
$x_0+\frac{t}{3}x_0+\frac{t}{3}(x_0+\frac{t}{3}x_0)+\frac{t}{3}(x_0+\frac{t}{3}x_0+\frac{t}{3}(x_0+\frac{t}{3}x_0))=x_0(1+\frac{t}{3})^3.$
N 分割ならば、$x_0(1+\frac{t}{N})^N$. $N\longrightarrow\infty$ のとき、$x_0(1+\frac{t}{N})^N\longrightarrow x_0e^t$ である。

(3) 冪級数解。

$x=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ とする。

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a_1+2a_2t+3a_3t^2+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n$

従って、$a_0=x_0$, $a_1=a_0=x_0$, $a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}x_0$, $a_3=\frac{1}{3}a_2=\frac{1}{3!}x_0,\ldots.$

$a_n=\dfrac{1}{n!}x_0$. 従って、$x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x_0t^n=x_0e^t.$

(4) 積分の反復。
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x$ は、$x=x_0+\displaystyle\int_0^t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}dt=x_0+\int_0^t xdt$ と同値である。
$[0,t]$ 上で $x=f_0(t)=x_0$ とする。
$f_1(t)=x_0+\displaystyle\int_0^t f_0(t)dt=x_0+x_0t.$
$f_2(t)=x_0+\displaystyle\int_0^t f_1(t)dt=x_0+x_0t+x_0\frac{t^2}{2}.$
$f_3(t)=x_0+\displaystyle\int_0^t f_2(t)dt=x_0+x_0t+x_0\frac{t^2}{2}+x_0\frac{t^3}{3!}.$
$\cdots$
$f_n(t)=x_0\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}$ とすると $f_{n+1}(t)=x_0+\displaystyle\int_0^t f_n(t)dt=x_0\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}$ となる。
これは x_0e^t に収束する。