

4. 常微分方程式とその解

4.1. 常微分方程式の定義. 常微分方程式は、 x を変数、 y を x の関数とすると、 x , y , $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, \dots , $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$ の間の関係式

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

あるいは

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

で与えられる。(将来、 y がベクトルに値を持つことも考える。) n を常微分方程式の階数と呼ぶ。

4.2. 常微分方程式の解. $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ を満たす x 関数 $y = f(x)$ を解と呼ぶ。

他に条件がない場合は通常、任意定数あるいは積分定数を n 個含む。その場合、一般解と呼ぶ。

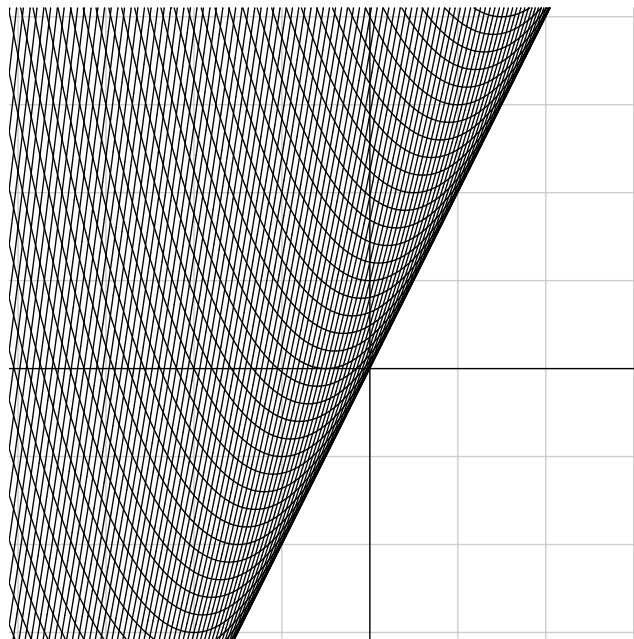
x_0 における値 $f(x_0)$ が定まっている等の条件から、任意定数の値が定まると、1 つの関数が定まるが、これを特殊解と呼ぶ。

一般解から、定数の値を定めるだけでは得られない解を持つこともあり、これを特異解と呼ぶ。

4.3. 特異解の例. $y = 2x$ に接する放物線族。

$y = (x - (a - 1))^2 + 2a - 1$ は、 $y' = 2(x - (a - 1))$ だから、 $y = \frac{(y')^2}{4} + 2x - y' + 1$ を満たす。

$y - 2x = \frac{(y' - 2)^2}{4}$ から $y - 2x = z$ とおくと $4z = (z')^2$. $z' = 2\sqrt{z}$, $\int \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \int dx$. $\sqrt{z} = x + C$, 従って、 $y - 2x = (x + C)^2$. 積分定数を取り替えてもとの式を得る。一方、 $y = 2x$ も解である。



4.4. クレローの微分方程式. $y = Cx + g(C)$ の形の直線の族を考える. $\frac{dy}{dx} = C$ だから、このような直線族は微分方程式 $y = \frac{dy}{dx}x + g\left(\frac{dy}{dx}\right)$ を満たしている。

この方程式 $y = \frac{dy}{dx}x + g\left(\frac{dy}{dx}\right)$ は、クレローの微分方程式と呼ばれている。

クレローの微分方程式の性質を見るために、 $\frac{dy}{dx} = p$ と置いて、一応、 p と y を独立に考える。 $y = px + g(p)$ とし、 $p = \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx}x + p + g'(p)\frac{dp}{dx}$ を得る。これから、 $\frac{dp}{dx}\{x + g'(p)\} = 0$ を得る。

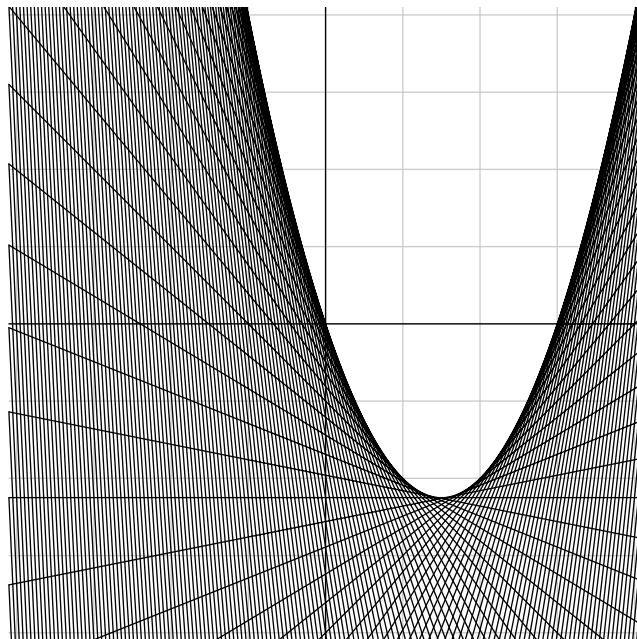
$\frac{dp}{dx} = 0$ の解は、 $p = \frac{dy}{dx} = C$ (C は定数) だから、クレローの微分方程式の $\frac{dy}{dx}$ に C を代入して $y = Cx + g(C)$ の形の直線の族が一般解となる。

一方、 $x + g'(p) = 0$ ならば、 t をパラメータとする曲線 $\begin{cases} x = -g'(t) \\ y = -tg'(t) + g(t) \end{cases}$ は、

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-tg''(t)}{-g''(t)} = t$ を満たし、 $y = -tg'(t) + g(t) = \frac{dy}{dx}x + g\left(\frac{dy}{dx}\right)$ だから、ク

レローの微分方程式の解になる。この曲線は、 $x = -g'(t)$ が、 $t = h(x)$ と解かれたとすると、 $y = xh(x) + g(h(x))$ と書かれ、方程式 $y = \frac{dy}{dx}x + g\left(\frac{dy}{dx}\right)$ の特異解となる。

特異解 $y = xh(x) + g(h(x))$ の上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は $y - y_0 = \{h(x_0) + x_0h'(x_0) + g'(h(x_0))h'(x_0)\}(x - x_0) = h(x_0)(x - x_0)$, ここで、 $y_0 = x_0h(x_0) + g(h(x_0))$ だから、 $y = h(x_0)x + g(h(x_0))$ となり、 $C = h(x_0)$ に対する一般解である。クレローの微分方程式は、曲線 $y = xh(x) + g(h(x))$ の接線全体および曲線自身を解にもつ。

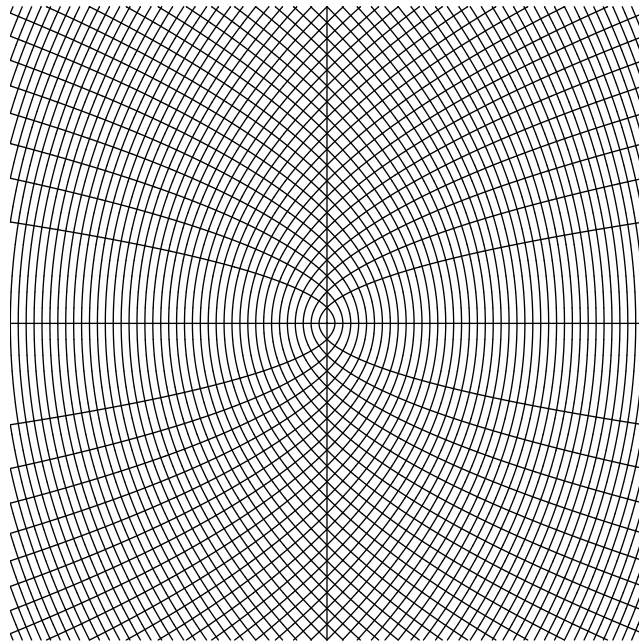


例. $y = x^2 - 3x$ の接線全体は、 $y - x_0^2 + 3x_0 = (2x_0 - 3)(x - x_0)$. すなわち、 $y + x_0^2 = (2x_0 - 3)x$.

$\frac{dy}{dx} = 2x_0 - 3$. だから、 $y = x^2 - 3x$ の接線全体のみたす微分方程式は $y - x \frac{dy}{dx} = -x_0^2 = -\frac{1}{4} \left(\frac{dy}{dx} + 3 \right)^2$.
 $y = x \frac{dy}{dx} - \frac{1}{4} \left(\frac{dy}{dx} + 3 \right)^2$ をもう一度微分して
 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + x \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2} \left(\frac{dy}{dx} + 3 \right)$ だから、 $\left(x - \frac{1}{2} \frac{dy}{dx} - \frac{3}{2} \right) \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ を得る。
 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ から、 $y = Cx - \frac{1}{4} (C + 3)^2$ という解を得る。
 $x - \frac{1}{2} \frac{dy}{dx} - \frac{3}{2} = 0$ から、 $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$ となり、微分方程式から $y = x(2x - 3) - x^2 = x^2 - 3x$ を得る。

4.5. 曲線族と微分方程式の例.

1つのパラメータに依存するような平面上の曲線の族が与えられると、その曲線の族が満たす微分方程式を書くことができることが多い。



(0, 0) を焦点とする軸が x 軸と平行な放物線の族

(0, 0) を焦点とする軸が x 軸と平行な放物線の族は、 $x = C$ からの距離と原点からの距離が等しい点として、 $x^2 + y^2 = (x - C)^2$ で与えられる。

$x + y \frac{dy}{dx} = x - C$ から、 $x^2 + y^2 = \left(x + y \frac{dy}{dx} \right)^2$ が微分方程式となる。これは、 $y(y - 2x \frac{dy}{dx} - y(\frac{dy}{dx})^2) = 0$ である。 $-y + 2x \frac{dy}{dx} + y(\frac{dy}{dx})^2 = 0$ は $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}(-x \pm \sqrt{x^2 + y^2})$ と書かれる。±の2つのとり方に対して、 $\frac{1}{y}(-x + \sqrt{x^2 + y^2}) \frac{1}{y}(-x - \sqrt{x^2 + y^2}) = -1$ これらの放物線が直交することを示している。

(1, 0), (-1, 0) への距離の比が一定の曲線。(アポロニウスの円)

その方程式は C を比を表す定数として $(x - 1)^2 + y^2 = C((x + 1)^2 + y^2)$. 両辺を微分すると $x - 1 + yy' = C(x + 1 + yy')$ だから、これらの2つの式から C を消去し

て微分方程式

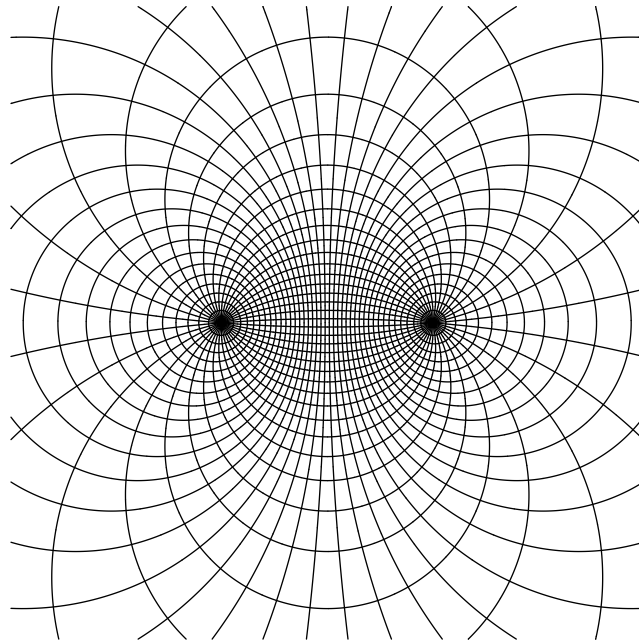
$$(x+1+yy')((x-1)^2+y^2) = (x-1+yy')((x+1)^2+y^2), (x^2-1)(-2)+2y^2 = yy'(4x),$$

すなわち $y' = \frac{-x^2+y^2+1}{2xy}$ を得る。

$(1,0), (-1,0)$ を通る円。(円周角一定の円)

$x^2+(y-c)^2=c^2+1$. すなわち、 $x^2+y^2-2cy=1$. $2x+2yy'-2cy'=0$ だから、微分方程式 $(x^2+y^2-1)y' = 2xy+2y^2y'$, すなわち $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2-1}$ を得る。

これらの曲線族は直交している。(微分方程式からわかる。)



共焦点楕円族、双曲線族

$(\pm 1, 0)$ を焦点とする楕円、双曲線は、 $\sqrt{(x-1)^2+y^2} \pm \sqrt{(x+1)^2+y^2} = C$ で表される。両辺を微分して、曲線族の微分方程式 $\frac{x-1+yy'}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \pm \frac{x+1+yy'}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} = 0$

が得られる。

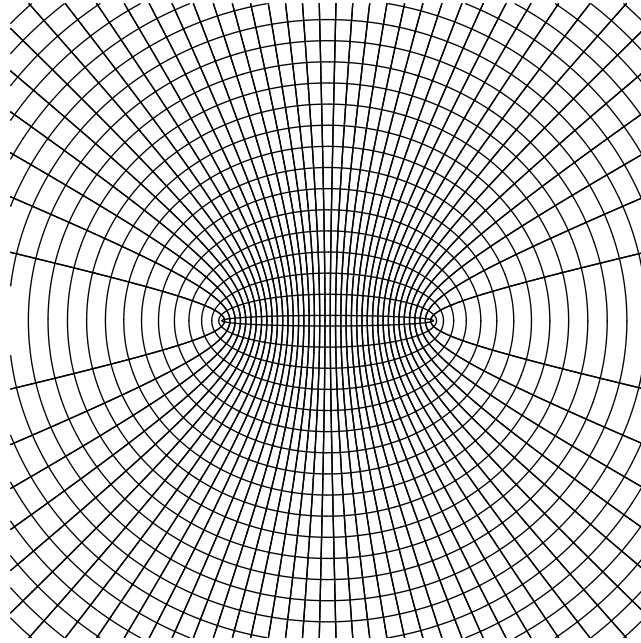
これらの曲線族は直交している。実際、微分方程式は

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}(x-1+yy') \pm \sqrt{(x-1)^2+y^2}(x+1+yy') = 0, \text{ すなわち}$$

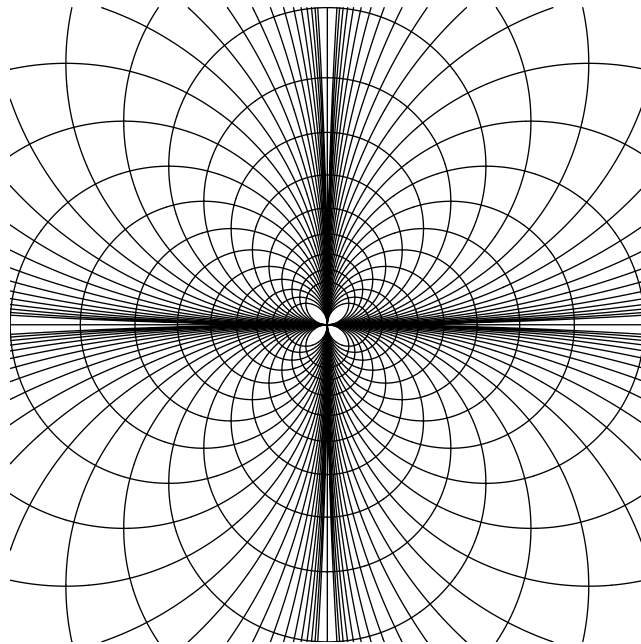
$$(\sqrt{(x+1)^2+y^2} \pm \sqrt{(x-1)^2+y^2})yy' + (x-1)\sqrt{(x+1)^2+y^2} \pm (x+1)\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 0 \text{ と書き直される。このとき、}$$

$$\frac{(x-1)\sqrt{(x+1)^2+y^2} + (x+1)\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{y(\sqrt{(x+1)^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+y^2})} - \frac{(x-1)\sqrt{(x+1)^2+y^2} - (x+1)\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{y(\sqrt{(x+1)^2+y^2} - \sqrt{(x-1)^2+y^2})} = -1$$

となる。(分子 $(x-1)^2((x+1)^2+y^2) - (x+1)^2((x-1)^2+y^2) = -4xy^2$
分母 $y^2(((x+1)^2+y^2) - ((x-1)^2+y^2)) = 4xy^2$ である。)



平面上の微分方程式 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ で与えられる曲線族に直交する曲線族は $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}$ あるいは、 $\frac{dx}{dy} = -f(x, y)$ であたえられる。



問。上の2つの曲線族を与える微分方程式を与えよ。これらの曲線族が直交することを示せ。

回答例。曲線族は $(x - C)^2 + y^2 = C^2$, $x^2 + (y - C)^2 = C^2$ である。

$(x - C)^2 + y^2 = C^2$ と $(x - C) + y \frac{dy}{dx} = 0$ から、 $(y \frac{dy}{dx})^2 + y^2 = (x + y \frac{dy}{dx})^2$ を得る。 $y^2 = x^2 + 2xy \frac{dy}{dx}$, あるいは $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$ が求める方程式である。

$x^2 + (y - C)^2 = C^2$ については、 $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$, あるいは、 $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ が求める方程式である。 $\frac{y^2 - x^2}{2xy} \frac{2xy}{x^2 - y^2} = -1$ だから、曲線族は直交する。

4.6. 連立微分方程式.

連立微分方程式は、例えば、2つの t の関数 x, y についての $t, x, x' = \frac{dx}{dt}, x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}, y, y' = \frac{dy}{dt}, y'' = \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}$ の間の関係式を与えるものであるが、通常、このような場合には、2つの関係式が必要である。これは、ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とその微分 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x^{(n)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \frac{d^n}{dt^n} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ についてのベクトルに値を持つ関係式とみることができる。

例。原点を中心とする同心円を $(r \cos t, r \sin t)$ のように表示すると、 $\frac{dx}{dt} = -r \sin t = -y, \frac{dy}{dt} = r \cos t = x$ を満たすから、同心円は、連立微分方程式
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$
 を満たしている。

例。Lotka-Volterra 方程式
$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (a_1 + b_1 u + c_1 v)u \\ \frac{dv}{dt} = (a_2 + b_2 u + c_2 v)v \end{cases}$$

これは、平面上の点 (u, v) の変化を表していると考えるのが良い。

4.7. ベクトル場. 一般に、平面上の点 (x, y) の変化の割合が点 (x, y) によって定まっていることは $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$ と表記される。これは、平面上のベクトル場を与えている。

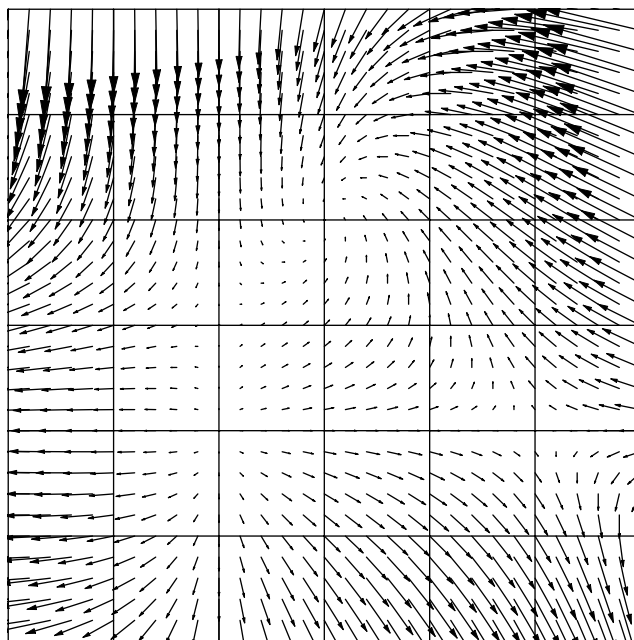
曲線 $(a(t), b(t))$ は、 $\begin{cases} \frac{da}{dt} = f(a(t), b(t)) \\ \frac{db}{dt} = g(a(t), b(t)) \end{cases}$ を満たすときに、この微分方程式の解である。

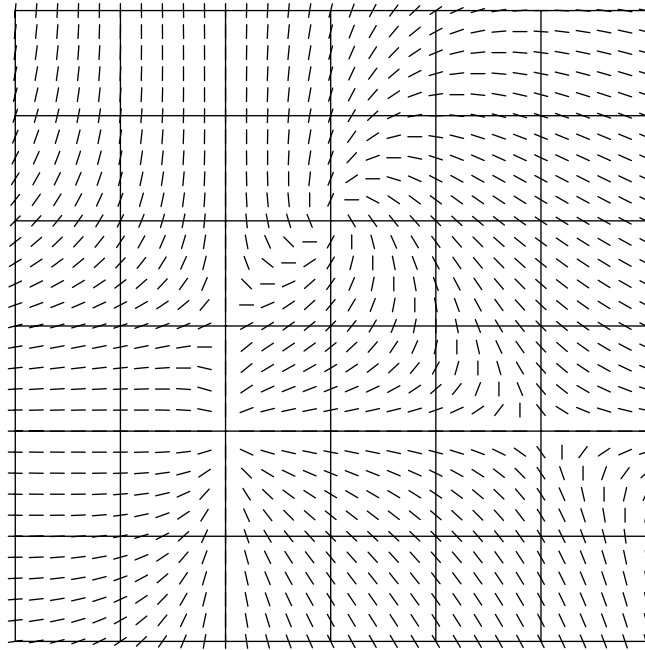
時間の進み方を k 倍にした曲線 $(a(kt), b(kt))$ は、 $\begin{cases} \frac{da(kt)}{dt} = k f(a(kt), b(kt)) \\ \frac{db(kt)}{dt} = k g(a(kt), b(kt)) \end{cases}$ を満たすから、 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = k g(x, y) \end{cases}$ の解である。

解曲線を軌道と呼ぶこともある。ベクトル場をスカラー倍しても、軌道の形は変わらない。

平面上のベクトル場を描くと、おおよその軌道の様子が見てとれることが多い。

ロトカ・ボルテラ方程式 $\begin{cases} \frac{du}{dt} = (3 - u - v)u \\ \frac{dv}{dt} = (1 + u - v)v \end{cases}$ について描いてみよう。





上の図は、各点にベクトルを（縮小して）描いたもの。下の図は、各点のベクトルの向きを小線分で表したものである。ひとつの小正方形の1辺の長さは1で、

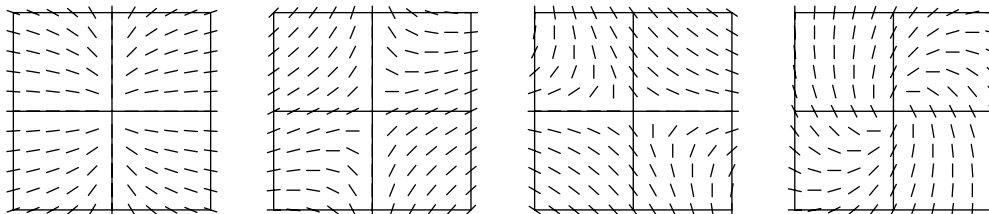
$$[-2, 4] \times [-2, 4] = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 4, -2 \leq y \leq 4\}$$

の範囲を描いたものである。直線 $u = 0, v = -u + 3, v = 0, v = u + 1$ を書き込むと良い。

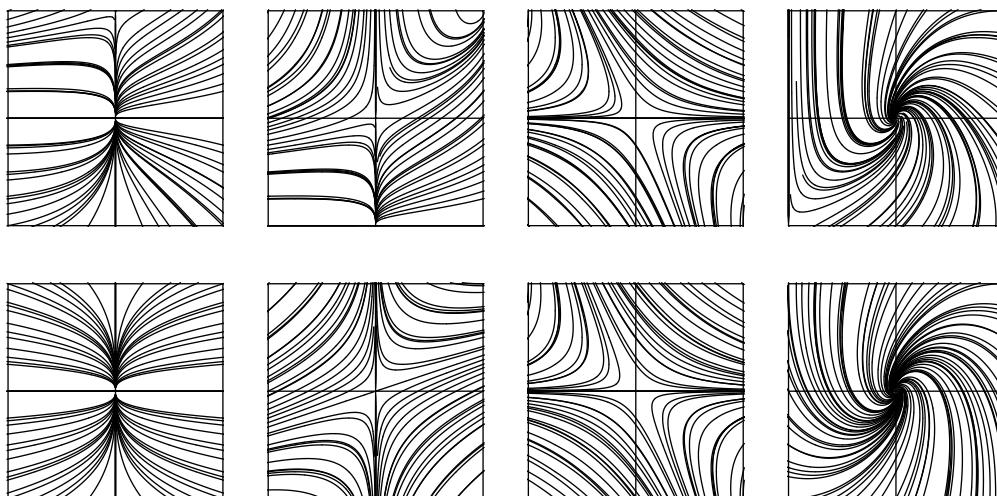
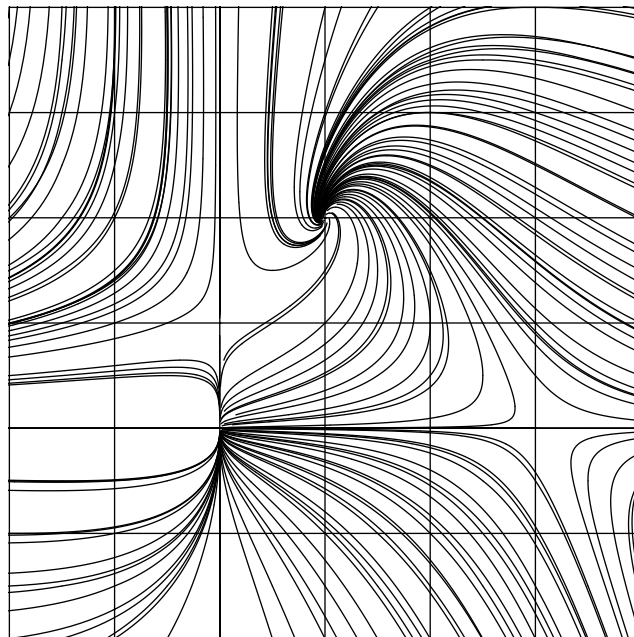
$$\frac{du}{dt} = 0, \frac{dv}{dt} = 0 \text{ となる点は、 } (0, 0), (0, 1), (3, 0), (1, 2).$$

それぞれの点 (a, b) で、 $u = a + \hat{u}, v = b + \hat{v}$ として、1次の項を取り出すとつぎの連立線形微分方程式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} = 3\hat{u} \\ \frac{d\hat{v}}{dt} = \hat{v} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} = 2\hat{u} \\ \frac{d\hat{v}}{dt} = \hat{u} - \hat{v} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} = -3\hat{u} - 3\hat{v} \\ \frac{d\hat{v}}{dt} = 4\hat{v} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} = -\hat{u} - \hat{v} \\ \frac{d\hat{v}}{dt} = 2\hat{u} - 2\hat{v} \end{cases}$$



これらの線形のベクトル場の方向を表した4つの図ともとのベクトル場が0となる4点の近くの様子を比較すると良い。

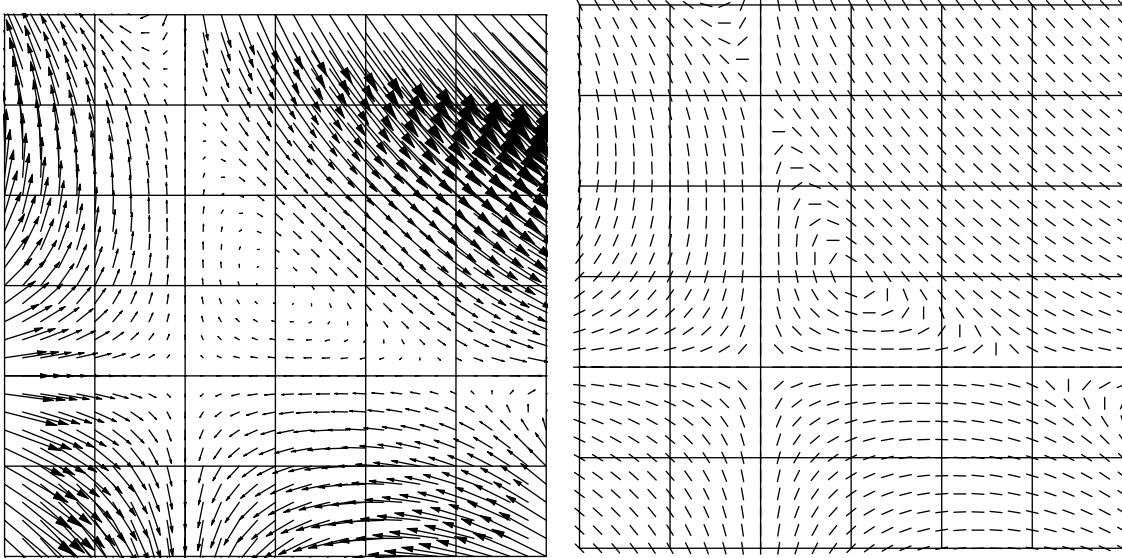


それぞれの解曲線の様子を図示したものである。中の4つの図は、Lotka-Vorterraベクトル場の零点の周り、下の4つの図は、線形方程式の様子である。これらの解曲線は、ベクトル場の零点の近くでは、ほとんど同じ形である。

ここでの図の描き方は、十分の小さな時間間隔についての「折れ線近似」である。

練習。ロトカ・ボルテラ方程式 $\begin{cases} \frac{du}{dt} = (-3 + u + 2v)u \\ \frac{dv}{dt} = (3 - 2u - v)v \end{cases}$ について同様の図を描いてみよ。

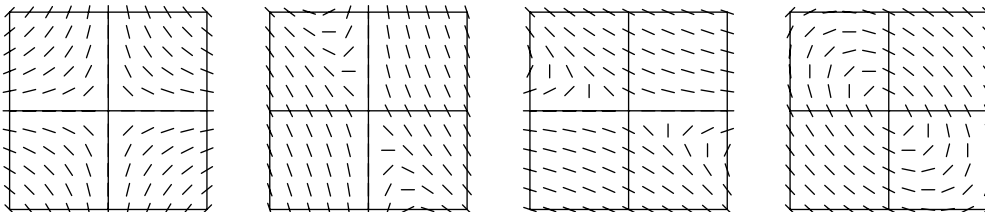
解答例。

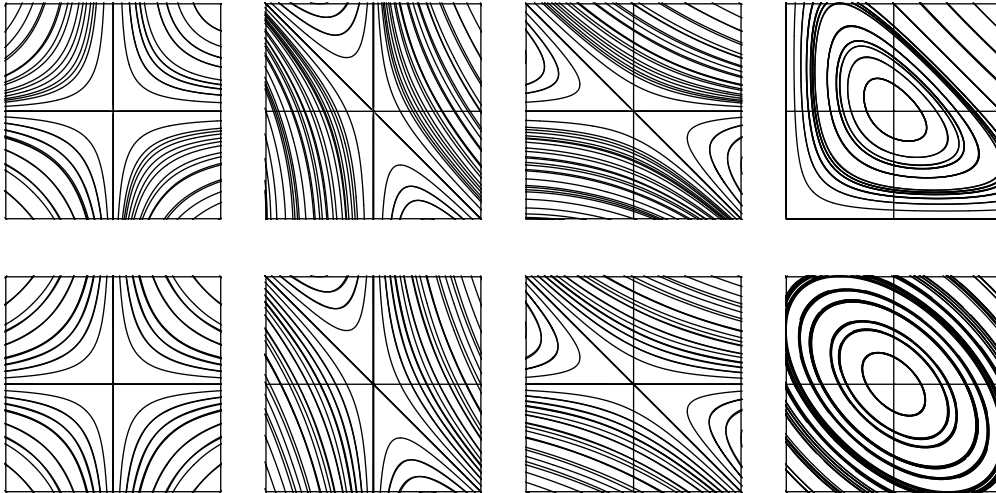
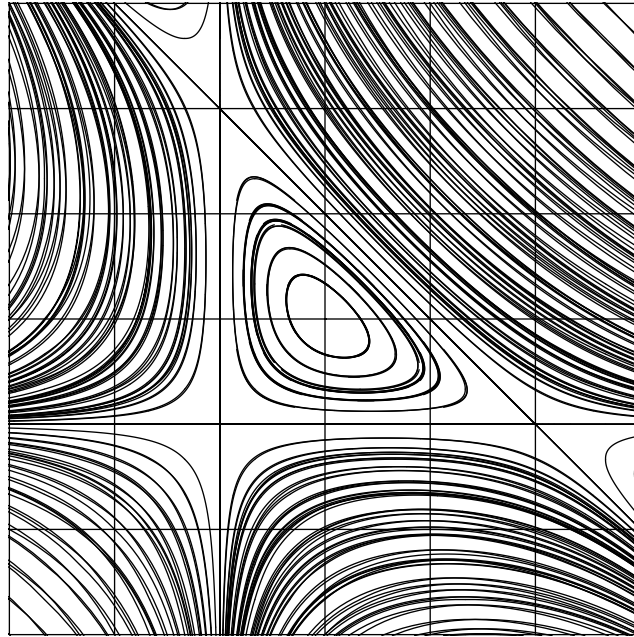


$\frac{du}{dt} = 0, \frac{dv}{dt} = 0$ となる点は、 $(0,0), (0,3), (3,0), (1,1)$.

それぞれの点 (a,b) で、 $u = a + \hat{u}, v = b + \hat{v}$ として、1次の項を取り出すとつぎの連立線形微分方程式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} = -3\hat{u} \\ \frac{d\hat{v}}{dt} = 3\hat{v} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} = 3\hat{u} \\ \frac{d\hat{v}}{dt} = -6\hat{u} - 3\hat{v} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} = 3\hat{u} + 6\hat{v} \\ \frac{d\hat{v}}{dt} = -3\hat{v} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} = \hat{u} + 2\hat{v} \\ \frac{d\hat{v}}{dt} = -2\hat{u} - \hat{v} \end{cases}$$





解を描いてみて、第1積分の存在が予想されるが、これは実際にハミルトニアン
 $H(u, v) = 3uv - u^2v - v^2u = uv(3 - u - v)$ についての微分方程式 $\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v} \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u} \end{cases}$ で
 あり、 $H(u, v)$ が第1積分である。

実際の解を、知られている関数で書き表すことは、滅多に出来ない。しかし、この図を見ると、「解は存在する。また、1つの微分方程式を近似している微分方程式の解は、もとの微分方程式の解に近い。」ということが成立していると思われる。

これを定式化するのが、常微分方程式の解の存在と一意性の定理である。