6. ２変数１階線形常微分方程式

6.1. ２変数１階線形同次微分方程式.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ について、線形の微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = A\vec{x}$, すなわち

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ あるいは $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$ を考える。

微分方程式を簡単にするために平面上の線形な座標変換を考える。２行２列の行列 $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ により、$\vec{x} = P\vec{y}$、つまり、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ で $\det P = p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12} \neq 0$ とする。P は一定の行列と考えているので、$\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = P\dfrac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}$.
従って、微分方程式は、$P\dfrac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = AP\vec{y}$ と変形される。P の逆行列 P^{-1} を用いて正規形に書き直せば、$\dfrac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = P^{-1}AP\vec{y}$ となる。

問題は、$P^{-1}AP$ を簡単にすることである。

この問題は、行列 A の固有値を考えることで、いくつかの場合に分かれる。

固有値とは、固有多項式

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21}$$

の解のことである。これは、実数係数の２次方程式であるから、固有値の可能性としては、異なる２つの実数、１つの実数、共役複素数の３通りがある。

（１）A の固有値が異なる２つの実数 λ_1, λ_2 の場合。

$\begin{pmatrix} \lambda_1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda_1 - a_{22} \end{pmatrix}$ の行列式は０だから、$\begin{pmatrix} \lambda_1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda_1 - a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる０ではないベクトル（固有ベクトル）$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ が存在する。関係式を書き換えると

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$$

である。λ_2 に対する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \lambda_2\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

である。これらの式は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

とまとめられる。従って $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ により、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ となる。

微分方程式は、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$、すなわち $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = \lambda_1 y_1 \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = \lambda_2 y_2 \end{cases}$ となる。従って、一般解は $\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$ となる。$t = 0$ で $\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$ を通る解は、$y_1 y_2$ 座標で $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$ となる。

$x_1 x_2$ 座標では、

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} C_1 e^{\lambda_1 t} + p_{12} C_2 e^{\lambda_2 t} \\ p_{21} C_1 e^{\lambda_1 t} + p_{22} C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

が一般解である。$t = 0$ で $\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$ を通る解は、$\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$ だから、
$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$、従って $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$ となる。

例。 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ について、固有多項式は

$$\det\begin{pmatrix} \lambda - 4 & 6 \\ -3 & \lambda + 5 \end{pmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 5) + 6 \cdot 3 = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

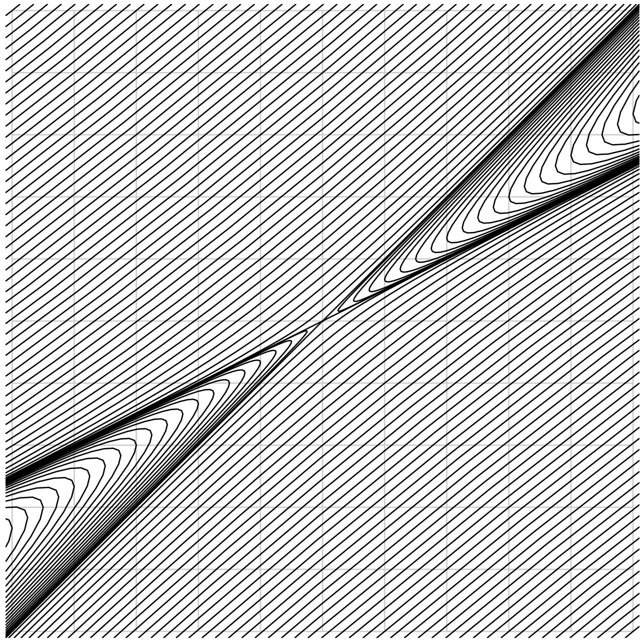
固有値 1 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 固有値 -2 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
従って、$A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ である。$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおくと、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. $t = 0$ のときに $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$ となる解は $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2\,1 \\ 1\,1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\,1 \\ 1\,1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{-2t} \\ e^t & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-2t} & -2e^t + 2e^{-2t} \\ e^t - e^{-2t} & -e^t + 2e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

一般解を求めるだけならば、次のように考えてよい。それぞれの固有ベクトル方向について次のようになっている。$y_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について、$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = y_1$ だから、$y_1 = C_1 e^t$.
$y_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ について、$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = -2y_2$ だから、$y_2 = C_2 e^{-2t}$. 従って、一般解は

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 e^t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のように書かれる。



（2）A の固有値が共役複素数 $\lambda, \overline{\lambda}$ の場合。

μ, ν を実数として $\lambda = \mu + i\nu$ とするとき、まず A が行列 $\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$ の場合を考える。この A の固有多項式は $\lambda^2 - 2\mu\lambda + \mu^2 + \nu^2 = 0$ で固有値は $\lambda = \mu + i\nu, \overline{\lambda} = \mu - i\nu$ である。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

複素数 $y_1 + iy_2$ を考えると、

$$\frac{\mathrm{d}(y_1 + iy_2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} + i\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = \mu y_1 - \nu y_2 + i(\nu y_1 + \mu y_2) = (\mu + i\nu)(y_1 + iy_2)$$

を満たす。$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \lambda z$ の解は, $e^{\lambda t}z^0$ であったが、この $e^{\lambda t}$ のテーラー展開

$$e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\lambda t)^n$$

は、複素数 λ に対しても収束しており、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\lambda t}z^0 = \lambda e^{\lambda t}z^0$ は、複素数 λ, z^0 に対しても成立している。

$$\begin{aligned} y_1 + iy_2 &= e^{(\mu+i\nu)t}(y_1^0 + iy_2^0) = e^{\mu t}e^{i\nu t}(y_1^0 + iy_2^0) \\ &= e^{\mu t}(\cos\nu t + i\sin\nu t)(y_1^0 + iy_2^0) \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\mu t}(y_1^0\cos\nu t - y_2^0\sin\nu t) \\ y_2 &= e^{\mu t}(y_1^0\sin\nu t + y_2^0\cos\nu t) \end{aligned}$$

となる。あるいは、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\mu t}\cos\nu t & -e^{\mu t}\sin\nu t \\ e^{\mu t}\sin\nu t & e^{\mu t}\cos\nu t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$$

と書かれる。

一般の $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して、固有多項式が、$\lambda^2 - 2\mu\lambda + \mu^2 + \nu^2 = 0$ $(\nu \neq 0)$ となっているとする。

ハミルトン・ケイレイの定理から、次が成立する。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^2 - 2\mu \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + (\mu^2 + \nu^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ として任意のベクトルをとる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$$

となる $\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ を探しているのだから、$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ を満たす $\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ をとる。すなわち、$\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\nu}\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \}$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \\ a_{21}\, a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\nu}\{ \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \\ a_{21}\, a_{22} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \\ a_{21}\, a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \} \\ &= \frac{1}{\nu}\{ (2\mu \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \\ a_{21}\, a_{22} \end{pmatrix} - (\mu^2 + \nu^2) \begin{pmatrix} 1\, 0 \\ 0\, 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \\ a_{21}\, a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \} \\ &= -\nu \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + \frac{\mu}{\nu}\{ \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \\ a_{21}\, a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \} = -\nu \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

こうして得られた $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ により、$P^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$ となり、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおくと、$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ についての微分方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

となる。この微分方程式の解は

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\mu t} \cos \nu t & -e^{\mu t} \sin \nu t \\ e^{\mu t} \sin \nu t & e^{\mu t} \cos \nu t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$$

である。$x_1 x_2$ 座標では

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{\mu t} \cos \nu t & -e^{\mu t} \sin \nu t \\ e^{\mu t} \sin \nu t & e^{\mu t} \cos \nu t \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

となる。

例。 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -13 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} -3 & -13 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ について、固有多項式は

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + 3 & 13 \\ -2 & \lambda - 7 \end{pmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda - 7) + 2 \cdot 13 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i)$$

となる。$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ として、

$$\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\{\begin{pmatrix} -3 & -13 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} -3 & -13 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおくと、$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t & -e^{2t}\sin t \\ e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t}\cos t & -e^{2t}\sin t \\ e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

すなわち、

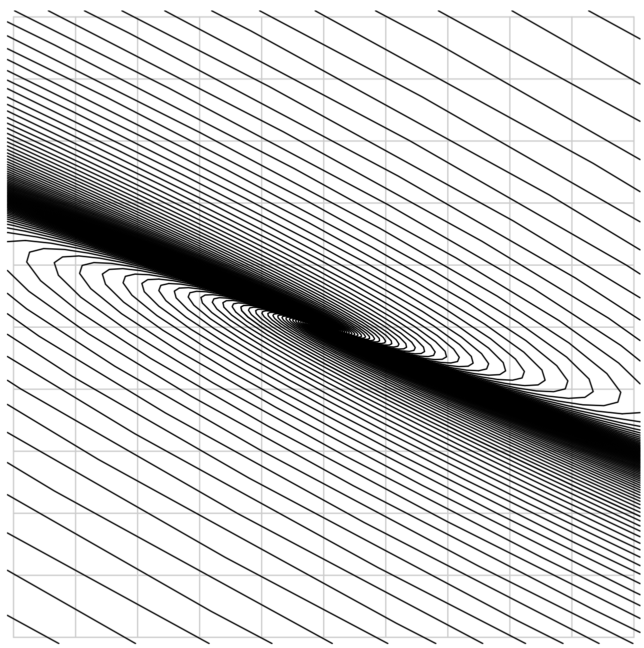
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t - 5e^{2t}\sin t & -13e^{2t}\sin t \\ 2e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t + 5e^{2t}\sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2+i$ に対する固有ベクトルは、$\lambda I - A = \begin{pmatrix} 5+i & 13 \\ -2 & -5+i \end{pmatrix}$ だから、$\begin{pmatrix} 5-i \\ -2 \end{pmatrix}$,

$\lambda = 2-i$ に対する固有ベクトルは、$\lambda I - A = \begin{pmatrix} 5-i & 13 \\ -2 & -5-i \end{pmatrix}$ だから、$\begin{pmatrix} 5+i \\ -2 \end{pmatrix}$

を得る。一般解は

$$C_1 e^{(2+i)t}\begin{pmatrix} 5-i \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{(2-i)t}\begin{pmatrix} 5+i \\ -2 \end{pmatrix}$$



（３）A の固有値が１つの実数 λ の場合。

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$$

をみたす。ここで、$\det\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}\neq 0$ となるように、$\begin{pmatrix}p_{12}\\ p_{22}\end{pmatrix}$ をとると、($\begin{pmatrix}p_{11}\\ p_{21}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}p_{12}\\ p_{22}\end{pmatrix}$ は基底となるから)

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{12}\\ p_{22}\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}p_{11}\\ p_{21}\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}p_{12}\\ p_{22}\end{pmatrix}$$

をみたす b, c がある。

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & b\\ 0 & c\end{pmatrix}$$

A と $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\lambda & b\\ 0 & c\end{pmatrix}$ の固有多項式は一致する。

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - P^{-1}AP) &= \det(\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I - A)P)\\ &= \det P^{-1}\det(\lambda - A)\det P = \det(\lambda - A)\end{aligned}$$

$\begin{pmatrix}\lambda & b\\ 0 & c\end{pmatrix}$ の固有値は λ, c であるから、固有値が1つの実数 λ の場合は $c = \lambda$ である。

$b = 0$ ならばスカラー行列で、$A = \lambda I$ であったことになり、$\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\lambda t} & 0\\ 0 & e^{\lambda t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^0\\ x_2^0\end{pmatrix}$ となる。

$b \neq 0$ とする。固有ベクトル $\begin{pmatrix}p_{11}\\ p_{21}\end{pmatrix}$ を $b\begin{pmatrix}p_{11}\\ p_{21}\end{pmatrix}$ に取り替えると、

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{12}\\ p_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{11}\\ p_{21}\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}p_{12}\\ p_{22}\end{pmatrix}$$

となる($b = 1$ にとることができる)から、この新しい $\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$ で $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$ と座標変換すると微分方程式は、y_1y_2 座標で

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

となるが、これは y_2 については解ける形である。$y_2(t) = e^{\lambda t}y_2^0$ となるが、このとき、y_1 についての方程式は線形非同次方程式である。

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = \lambda y_1 + y_2(t) = \lambda y_1 + e^{\lambda t}y_2^0$$

このような方程式の解は、定数変化法により、$y_1(t) = C(t)e^{\lambda t}$ の形で求められるのであった。これを代入すると

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}e^{\lambda t} + \lambda C(t)e^{\lambda t} = \lambda C(t)e^{\lambda t} + e^{\lambda t}y_2^0$$

すなわち、$\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = y_2^0$ だから、$C(t) = y_2^0 t + y_1^0$ となる。従って、

$$\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\lambda t}(y_2^0 t + y_1^0)\\ e^{\lambda t}y_2^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\lambda t} & e^{\lambda t}t\\ 0 & e^{\lambda t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1^0\\ y_2^0\end{pmatrix}$$

x_1x_2 座標では

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & e^{\lambda t}t\\ 0 & e^{\lambda t}\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}x_1^0\\ x_2^0\end{pmatrix}$$

となる。

例。 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&9\\-4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}-7&9\\-4&5\end{pmatrix}$ について、固有多項式は

$$\det\begin{pmatrix}\lambda+7&-9\\4&\lambda-5\end{pmatrix}=(\lambda+7)(\lambda-5)+9\cdot4=\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2$$

となる。固有値 -1 に対する固有ベクトルは、$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ である。これと線形独立（１次独立）なベクトル、例えば、$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ をとると、$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-4\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ を得る。ここで、$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$ にとりかえて、

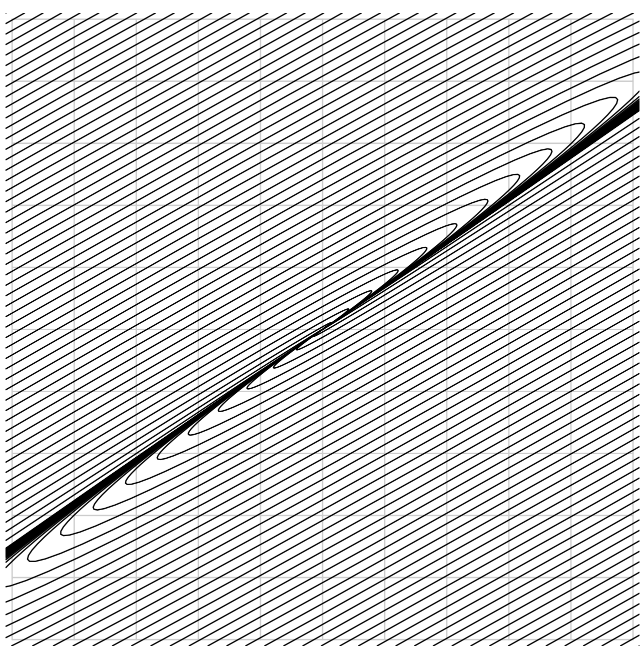
$$\begin{pmatrix}-7&9\\-4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6&1\\-4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&1\\-4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}$$

を得る。$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&1\\-4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ とおくと、$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-t}&e^{-t}t\\0&e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1^0\\y_2^0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&1\\-4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-t}&e^{-t}t\\0&e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{4}\\1&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^0\\x_2^0\end{pmatrix}$$

すなわち、

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6e^{-t}t+e^{-t}&9e^{-t}t\\-4e^{-t}t&6e^{-t}t+e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^0\\x_2^0\end{pmatrix}$$



6.2. **２変数１階線形同次微分方程式のまとめ.** ２変数１階線形同次微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対しては、$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ を A に対してうまくとれば、$P^{-1}AP$ が、$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ のように書かれる。そこで、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ と座標変換すると、$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ は、
$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e^{\mu t}\cos\nu t & -e^{\mu t}\sin\nu t \\ e^{\mu t}\sin\nu t & e^{\mu t}\cos\nu t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t}t \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$ のように計算される。さらに、$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ は，$P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$,
$P\begin{pmatrix} e^{\mu t}\cos\nu t & -e^{\mu t}\sin\nu t \\ e^{\mu t}\sin\nu t & e^{\mu t}\cos\nu t \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$, $P\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t}t \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$ のように計算される。

このことから、２変数１階線形同次微分方程式の解の性質として、次のことがわかる。

- 解の定数倍、２つの解の和は解である。（解全体はベクトル空間になる。）
- 解は、初期値 $\vec{x}^0$ により一意的に定まり、初期値ついて線形である。（解の空間の次元は２である。）
- 解に現れる関数は、A の固有方程式の固有値によりわかる。

このうちの最初の２つの性質は、方程式を解かなくてもわかることである。