4月9日

1. 常微分方程式の意味

1.1. 関数の微分とグラフの傾き. $y=f(x)$ のグラフを考える。グラフ上の点 $(x_0, f(x_0))$ におけるグラフの傾きは、$f(x)$ の x_0 における微分 $f'(x_0)=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ で与えられる。

$$f'(x_0)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

1.2. 積分. 導関数 $g(x)$ が与えられたとき、$f'(x)=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)=g(x)$ となる $f(x)$ は、$f(x)=f(x_0)+\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(x)\mathrm{d}x$ で与えられる。

$f(x_0)$ が指定されていなければ、積分定数の差を除いて $f(x)$ は定まる。

1.3. 微分方程式とは何か. 関数の微分が関数自体 (の値) に依存する関係を表すものが微分方程式である。

1.4. 例. 以下では、変数を明示した書き方を使う。

(1) 放射性物質の崩壊：$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-ku.$

(2) ロジスティック方程式：$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=(a-bu)u.$

(3) 単振動の方程式：$m\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=-ku.$

これらの式の意味を考えよ。

1.5. 上の関係式を満たす関数. 最初の 2 つの例 (1), (2) では tu 平面上の各点 (t,u) に傾きが u だけの関数として与えられている。そのような傾きを持つ曲線が u のグラフとなる。

(1) の $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-ku$ を満たす関数は、$u(t)=e^{-kt}u_0$.

最後の (3) は、位置 u, 速度 $v=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ が状態を表し、$m=k=1$ ならば、$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ における微分 (変化率) は $\begin{pmatrix}v\\-u\end{pmatrix}$. この変化率を実現する運動が、$u$ の軌道となる。uv 平面上の円となる。$m=k=1$ ならば、(3) を満たす関数は $u=K\sin(t-t_0)$, $v=K\cos(t-t_0)$ となる.

1.6. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x$ の解き方.

(0) 答えを知って当てはめる。$x=x_0e^t$.

(1) 変数分離。
$\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1$ だから $\displaystyle\int\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int 1\mathrm{d}t.$ 故に、$\log|x|=t+c$, すなわち $x=Ce^t$.

(2) 折れ線近似。

0 で値が x_0, $[0,t]$ で、傾きが x_0 ならば、x_0+tx_0.

0 で値が x_0, $[0,\frac{t}{2}]$ で、傾きが x_0 ならば、$\frac{t}{2}$ での値は $x_0+\frac{t}{2}x_0$, $[\frac{t}{2},t]$ での傾きは $x_0+\frac{t}{2}x_0$ として、t での値は $x_0+\frac{t}{2}x_0+\frac{t}{2}(x_0+\frac{t}{2}x_0)=x_0(1+\frac{t}{2})^2$.

同様に 3 分割のときは、t での値は、$x_0+\frac{t}{3}x_0+\frac{t}{3}(x_0+\frac{t}{3}x_0)+\frac{t}{3}(x_0+\frac{t}{3}x_0+\frac{t}{3}(x_0+\frac{t}{3}x_0))=x_0(1+\frac{t}{3})^3$.

N 分割ならば、$x_0(1+\frac{t}{N})^N$. $N\longrightarrow\infty$ のとき、$x_0(1+\frac{t}{N})^N\longrightarrow x_0e^t$ である。

(3) 冪級数解。

$x=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ とする。

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a_1+2a_2t+3a_3t^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n$

従って、$a_0=x_0,\ a_1=a_0=x_0,\ a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}x_0,\ a_3=\frac{1}{3}a_2=\frac{1}{3!}x_0,\ \ldots.$ $a_n=\frac{1}{n!}x_0$. 従って、$x=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x_0t^n=x_0e^t$.

(4) 積分の反復。

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x$ は、$x=x_0+\int_0^t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}dt=x_0+\int_0^t xdt$ と同値である。

$[0,t]$ 上で $x=f_0(t)=0$ とする。

$f_1(t)=x_0+\int_0^t f_0(t)dt=x_0$.

$f_2(t)=x_0+\int_0^t f_1(t)dt=x_0+x_0t$.

$f_3(t)=x_0+\int_0^t f_2(t)dt=x_0+x_0t+x_0\frac{t^2}{2}$.

$f_4(t)=x_0+\int_0^t f_3(t)dt=x_0+x_0t+x_0\frac{t^2}{2}+x_0\frac{t^3}{3!}$.

$f_n(t)=x_0\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}$ とすると $f_{n+1}(t)=x_0+\int_0^t f_n(t)dt=x_0\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}$ となる。これは x_0e^t に収束する。