

2. 不定積分を使って解ける常微分方程式

2.1. 合成関数の微分. x を変数とする関数 $f(x)$ について、 x が変数 t の関数 $x(t)$ となっていると、

$$\frac{df(x(t))}{dt} = \frac{df}{dx}(x(t)) \frac{dx}{dt}(t) = f'(x(t))x'(t) \text{ となる。}$$

$$\text{逆に、置換積分 } f(x(b)) - f(x(a)) = \int_{x(a)}^{x(b)} \frac{df}{dx} dx = \int_a^b \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} dt \text{ となる。}$$

2.2. 変数分離形. $y' = X(x)Y(y)$.

例: $\frac{du}{dt} = (1-u)u$. logistic 方程式。

$$\frac{1}{(1-u)u} \frac{du}{dt} = 1 \text{ だから両辺を積分して } \int_0^t \frac{1}{(1-u)u} \frac{du}{dt} dt = \int_0^t 1 dt$$

$$\frac{1}{(1-u)u} = \frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \text{ であり、この } u \text{ の関数の不定積分は}$$

$$\log|u| - \log|1-u| = \log \left| \frac{u}{1-u} \right| \text{ であるから、}$$

$$\int_0^t \frac{1}{(1-u)u} \frac{du}{dt} dt = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{1}{(1-u)u} du = \log \left| \frac{u(t)}{1-u(t)} \right| - \log \left| \frac{u(0)}{1-u(0)} \right| = t.$$

すなわち、 $\frac{u(t)}{1-u(t)} \frac{1-u(0)}{u(0)} = \pm e^t$. ここで $t=0$ で $u = u(0)$ だから、 \pm は + の

方をとる。

$$\frac{u(t)}{1-u(t)} = \frac{u(0)}{1-u(0)} e^t.$$

$$u(t) = \frac{u(0)}{1-u(0)} e^t (1-u(t)).$$

$$(1 + \frac{u(0)}{1-u(0)} e^t) u(t) = \frac{u(0)}{1-u(0)} e^t$$

$$u(t) = \frac{u(0)e^t}{1-u(0) + u(0)e^t}$$

解は、 $0 < u(0) < 1$ ならば、 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 1$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$.

$u(0) > 1$ ならば、 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 1$, $\lim_{t \rightarrow \log \frac{u(0)-1}{u(0)}} u(t) = +\infty$.

$u(0) < 1$ ならば、 $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \log \frac{u(0)-1}{u(0)}} u(t) = -\infty$.

反省。不定積分として $\int \frac{1}{(1-u)u} du = \int 1 dt$ だから、 $\log \left| \frac{u(t)}{1-u(t)} \right| = t + C$.

C を取り替えて、 $\frac{u(t)}{1-u(t)} = Ce^t$ として、 $C = \frac{u(0)}{1-u(0)}$ である。

$$\text{ゆえに、} u(t) = \frac{Ce^t}{1+Ce^t} = \frac{u(0)e^t}{1-u(0) + u(0)e^t}.$$

このように不定積分を積分定数を適当において定め、あとで積分定数を定める方が効率的かもしれない。

問 (1). 変数分離形常微分方程式 $\frac{dy}{dx} = (3x^2 - 1)(y - 1)(y + 1)$ の一般解を求めよ。

問 (2). 変数分離形常微分方程式 $\frac{dy}{dx} = (y - 1)y \cos x$ の $y(0) = \frac{1}{2}$ となる解を求めよ。

問 (3). 変数分離形の微分方程式 $\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y)$ の解法をまとめよ。

2.3. 同次形.

例. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y} = \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}$

$z = \frac{y}{x}$ とおく。 $y = zx$ だから、 $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}x + z$.

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{1 - z}{1 + z} - z = \frac{1 - 2z - z^2}{1 + z}$$

$$\frac{1 + z}{1 - 2z - z^2} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int_{x_0}^x \frac{1 + z}{1 - 2z - z^2} \frac{dz}{dx} dx = \int_{x_0}^x \frac{1}{x} dx.$$

$\int_{x_0}^x \frac{1 + z}{1 - 2z - z^2} \frac{dz}{dx} dx = \int_{z(x_0)}^z (x) \frac{1 + z}{1 - 2z - z^2} dz$ について、 $w = 1 - 2z - z^2$ とすると、 $dw = -2(1 + z)dz$.

だから、左辺 = $\int_{w(z(x_0))}^{w(z(x))} -\frac{1}{2} \frac{1}{w} dw = -\frac{1}{2} (\log |w(z(x))| - \log |w(z(x_0))|)$.

$$\log |1 - 2z(x) - z(x)^2| - \log |1 - 2z(x_0) - z(x_0)^2| = -2(\log |x| - \log |x_0|)$$

$$\frac{1 - 2z(x) - z(x)^2}{1 - 2z(x_0) - z(x_0)^2} = \pm \frac{x_0^2}{x^2}. \text{ ここで } \pm \text{ は } + \text{ をとる.}$$

$$1 - 2z(x) - z(x)^2 = \frac{x_0^2}{x^2} (1 - 2z(x_0) - z(x_0)^2). \text{ ここで } \pm \text{ は } + \text{ をとる.}$$

$$1 - 2\frac{y(x)}{x} - \frac{y(x)^2}{x^2} = \frac{x_0^2}{x^2} \left(1 - 2\frac{y(x_0)}{x_0} - \frac{y(x_0)^2}{x_0^2}\right).$$

$$x^2 - 2xy - y^2 = x_0^2 - 2x_0y(x_0) - y(x_0)^2$$

変数分離型の計算の時と同じ反省。

不定積分として $\int \frac{1 + z}{1 - 2z - z^2} dz = \int \frac{1}{x} dx$ だから、

$$-\frac{1}{2} \log |1 - 2z - z^2| = \log |x| + C.$$

従って、別の C に取り替えて $(1 - 2z - z^2)x^2 = C$.

すなわち、 $x^2 - 2xy - y^2 = C$.

- 問(1) 同次形常微分方程式 $\frac{dy}{dx} = 2\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ に対し、 $y(x) = xz(x)$ とおいて、 z の満たす正規形常微分方程式を求めよ。
 (2) 常微分方程式の一般解 $z(x)$ を求めよ。
 (3) 常微分方程式の $y(1) = 2$ となる解 $y(x)$ を求めよ。

問. 同次形の微分方程式 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ の解法についてまとめよ。

2.4. 1階線形常微分方程式. (定数変化法)

例. $\frac{dy}{dx} + xy = x.$

y と $\frac{dy}{dx}$ について、関数を係数として線形になっている。

まず、 $\frac{dy}{dx} + xy = 0$ を解く。線形な場合の常套手段。

これは変数分離形だから、 $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -x$ を積分して $\int \frac{1}{y} dy = -\int x dx.$

つまり $\log|y| = -\frac{x^2}{2} + C.$

C を取り替えて、 $y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$

もとの方程式の解を $y = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ の形で探す。定数変化法という。

これを代入すると、 $\frac{dC}{dx}e^{-\frac{x^2}{2}} + C\frac{de^{-\frac{x^2}{2}}}{dx} + xCe^{-\frac{x^2}{2}} = x$

すなわち、 $\frac{dC}{dx}e^{-\frac{x^2}{2}} = x$ を得る。

$\frac{dC}{dx} = xe^{\frac{x^2}{2}}$ だから、 $C(x) = \int xe^{\frac{x^2}{2}} dx = e^{\frac{x^2}{2}} + C_1$

従って、 $y = (e^{\frac{x^2}{2}} + C_1)e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + C_1e^{-\frac{x^2}{2}}.$

問. $t > 0$ に対して定義された1階線形常微分方程式 $\frac{dx}{dt} - 2\frac{x}{t} = t^3$ の $x(1) = 1$ となる解を求めよ。

問. 1階線形微分方程式 $\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t)$ について、解法をまとめよ。

2.5. 1階線形微分方程式に帰着されるよく知られている微分方程式. ベルヌーイの微分方程式

$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t)y^m$ ($m \neq 0, 1$)

(両辺を y^m で割ってみる。)

$z = y^{1-m}$ について $\frac{dz}{dt} + (1-m)P(t)z = (1-m)Q(t)$ となる。

リッカチ型微分方程式 ($\frac{dy}{dt}$ が独立変数の関数を係数とする y の2次式)

$$\frac{dy}{dt} = P(t)y^2 + Q(t)y + R(t)$$

ひとつの解 $\varphi(t)$ がわかっているとき、 $z = y - \varphi$ は

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{dy}{dt} - \frac{d\varphi}{dt} \\ &= P(t)(y^2 - \varphi^2) + Q(t)(y - \varphi) = P(t)z(z + 2\varphi) + Q(t)z \end{aligned}$$

すなわち、

$\frac{dz}{dt} - (2\varphi(t)P(t) + Q(t))z = P(t)z^2$ というベルヌーイ型の微分方程式を満たす。

したがって $z = u^{-1}$ が 1 階線形微分方程式の解として求まる。このとき、 $y(t) = \varphi(t) + z(t)^{-1}$ と求まる。